NORTHEASTERN UNIVERSITY LIBRARY

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHEMATIQUES

FASCICULE XII.

Le méthode de Darboux et les équations $s = f(x, y, z, p, q)$

PAR M. R. GOSSE

QA
2
M93
fasc. 12





Northeastern University
Library

MATH

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

77057-26 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XII.

La méthode de Darboux et les équations $s = f(x, y, z, p, q)$

Par M. R. GOSSE,
Professeur à l'Université de Grenoble.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

QH
2
M93
fasc. 12

1926

LA MÉTHODE DE DARBOUX

ET LES ÉQUATIONS $s = f(x, y, z, p, q)$

Par M. R. GOSSE.

CHAPITRE I.

LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES.

1. Le problème de Cauchy. — Étant donnée l'équation

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

dont nous désignerons les dérivées partielles par rapport à r, s, t par R, S, T, le problème de Cauchy consiste à déterminer une surface intégrale Σ, sachant qu'elle passe par une courbe donnée Γ, le long de laquelle le plan tangent est connu en chaque point. Nous dirons qu'un système de formules représente l'intégrale générale de l'équation (1), s'il permet de résoudre le problème de Cauchy.

Tous les éléments de la *multiplicité* x, y, z, p, q donnée sont des fonctions d'un paramètre variable λ assujetties à la seule condition

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Les deux relations

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

jointes à l'équation (1), détermineront r, s, t en fonction de λ si l'expression

$$\Delta \equiv R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2$$

n'est pas nulle, ce que nous supposerons d'abord.

Nous poserons

$$p_{ik} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}, \qquad p_{00} = z.$$

Pour calculer les quatre nombres p_{ik} où $i + k = 3$, on aura les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} dp_{20} = p_{30}\,dx + p_{21}\,dy, \qquad dp_{11} = p_{21}\,dx + p_{12}\,dy, \\ dp_{02} = p_{12}\,dx + p_{03}\,dy, \end{cases}$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0.$$

Si l'on convient de désigner par $\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)$ ce qui reste de la dérivée partielle par rapport à y d'une fonction Φ d'ordre n, quand on en a supprimé les termes d'ordre $n+1$, la dernière équation s'écrit

$$(3) \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = \mathrm{R}\,p_{2,1} + \mathrm{S}\,p_{1,2} + \mathrm{T}\,p_{0,3} + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) = 0.$$

Si nous remarquons que $\frac{d\mathrm{F}}{dx} = 0$ est une conséquence de $\mathrm{F} = 0$ et $\frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0$, on aura, pour déterminer toutes les dérivées p_{ik}, où $i + k \leqq 3$, le système

$$\mathrm{F} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0, \qquad dp_{ik} = p_{i+1,k}\,dx + p_{i,k+1}\,dy \qquad (i + k \leqq 2).$$

C'est un système de sept équations à sept inconnues, qui seront déterminées si les équations (2) et (3), linéaires par rapport aux dérivées de troisième ordre, ont un déterminant non nul. Celui-ci est

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \\ 0 & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{vmatrix} = \Delta\,dx,$$

et comme on peut toujours supposer $dx \neq 0$, il n'est pas nul.

D'une façon générale, supposons que le système

$$\mathrm{S} \begin{cases} \mathrm{F} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{n-2}\mathrm{F}}{dy^{n-2}} = 0, \\ dp_{i,k} = p_{i+1,k}\,dx + p_{i,k+1}\,dy, \qquad i + k \leqq n - 1 \end{cases}$$

détermine en fonction de λ toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n

inclusivement, si Δ n'est pas nul. Pour déterminer les dérivées d'ordre $n+1$, il faudra lui adjoindre les relations $\frac{d^{n-1}F}{dx^i\,dy^k} = 0$, où $i+k = n-1$, qui se réduisent en tenant compte de la première ligne de S à $\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}} = 0$, et les relations

$$dp_{i,k} = p_{i+1,k}\,dx + p_{i,k+1}\,dy, \qquad \text{où} \qquad i+k = n.$$

On aura ainsi, pour calculer les $n+2$ dérivées d'ordre $n+1$, $n+2$ équations linéaires dont le déterminant

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dx & dy & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & dx & dy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R & S & T \end{vmatrix} = \Delta\,dx^{n-2}$$

est encore différent de zéro. Si donc nous donnons à λ une valeur λ_0 telle que $\Delta(\lambda_0)$ ne soit pas nul, le développement en série de z suivant les puissances de $x - x(\lambda_0)$, $y - y(\lambda_0)$ est formellement déterminé et les méthodes du calcul des limites permettent de démontrer sa convergence sous des conditions d'analyticité des données que nous supposerons toujours vérifiées. *Il existe* donc, sous ces hypothèses, *une surface intégrale et une seule qui passe par une courbe donnée* Γ *et soit tangente, le long de* Γ, *à une développable donnée.*

2. Courbes caractéristiques. — La conclusion précédente est en défaut si Δ est nul. On appelle *équation caractéristique* l'équation

$$\Delta = Rm^2 - Sm + T = 0;$$

M. Goursat a complètement étudié [1] le cas où ses racines sont confondues. Nous les supposerons distinctes et les désignerons par m_1 et m_2. Quand Δ est nul, on peut avoir

$$\text{soit} \quad dy = m_1\,dx, \qquad \text{soit} \quad dy = m_2\,dx.$$

---

[1] GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 164 et sq.

Sur une surface intégrale donnée Σ_1 où z, p, q, r, s, t sont des fonctions connues de x et y, ce sont là les équations différentielles de deux systèmes de courbes C_1 et C_2 qu'on appelle *courbes caractéristiques*. Par chaque point de la surface, il en passe, en général, une et une seule de chaque système.

3. **Caractéristiques du premier ordre.** — Supposons l'équation (1) résolue par rapport à r. L'équation caractéristique de

$$r + f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

sera

$$m^2 - m \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

et l'on a

$$m_1 + m_2 = \frac{\partial f}{\partial s}, \qquad m_1 m_2 = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Considérons une multiplicité M_1 de Σ, admettant une courbe C_1 comme support. Entre ses éléments, on aura, quelle que soit Σ, les relations

$$S' \left\{ \begin{array}{lr} (4) & r + f = 0, \\ (5) & dy = m_1\, dx, \\ (6) & dz = p\, dx + q\, dy, \\ (7) & dp = dx(r + m_1 s), \\ (8) & dq = (s + m_1 t)\, dx. \end{array} \right.$$

L'équation (5) exprimant que Δ est nul, on ne peut pas tirer r, s, t de (4), (7) et (8). Mais il se présente ici une circonstance exceptionnelle : On peut, en général, calculer r, s, t au moyen de (5), (7) et (8). Supposons d'abord qu'il n'en soit pas ainsi. Il faut ([1]) que (5) et (8) ne déterminent pas s et t, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} - m_1 \frac{\partial m_1}{\partial s} = 0.$$

L'équation donnée s'obtient alors en éliminant m_1 entre deux relations de la forme

$$r + m_1 s + \psi(x, y, z, p, q, m_1) = 0, \qquad s + m_1 t + \varphi(x, y, z, p, q, m_1) = 0$$

([1]) GAU, *Annales de l'Université de Grenoble*, t. XXX, 1918, p. 295-305.

et le système S′ montre alors que la dérivée t, par exemple, est indéterminée pour les multiplicités M_1 qui vérifient les trois équations

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad \frac{dp}{dx} + \psi\left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$
$$\frac{dq}{dx} + \varphi\left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Ces multiplicités s'appellent *des caractéristiques du premier ordre*. Il n'en existe pas en général; et s'il en existe pour les deux systèmes de caractéristiques, un calcul facile montre que l'équation proposée a la forme de Monge-Ampère.

4. **Caractéristiques du second ordre.** — Supposons maintenant que les équations (5), (7), (8) déterminent r, s, t. Si l'on veut déterminer les dérivées du troisième ordre, le calcul du n° 1 montre que les équations (2) et (3) qui les déterminent ne sont compatibles, quand $dy = m_1\,dx$, que si

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) + R\frac{ds}{dx} + T\frac{dt}{dy} = 0, \tag{9}$$

condition qui s'écrit, si $F \equiv r + f$,

$$\left(\frac{df}{dy}\right)dx + ds + m_2\,dt = 0. \tag{10}$$

Il est alors toujours possible de choisir les huit nombres x, y, z, p, q, r, s, t, de manière qu'ils vérifient les six équations (4), (5), (6), (7), (8), (10): en prenant x comme variable, les autres dépendent encore d'une fonction arbitraire. Toute multiplicité M_2 qui vérifie ces six équations s'appelle une *caractéristique du second ordre*, elle a pour support une courbe caractéristique, sur une surface intégrale.

Reprenons alors les calculs du n° 1. En tenant compte de la relation $\Delta = 0$, les trois équations

$$R\,p_{2,n-2} + S\,p_{1,n-1} + T\,p_{0,n} + \left(\frac{d^{n-2}F}{dy^{n-2}}\right) = 0,$$
$$dp_{1,n-2} = p_{2,n-2}\,dx + p_{1,n-1}\,dy, \qquad dp_{0,n-1} = p_{1,n-1}\,dx + p_{0,n}\,dy$$

ne sont compatibles que si l'on a

$$\left(\frac{d^{n-2}F}{dy^{n-2}}\right) + R\frac{dp_{1,n-2}}{dx} + T\frac{dp_{0,n-1}}{dy} = 0. \tag{11}$$

Nous pouvons assujettir la dérivée $p_{0,3}$, qui est restée arbitraire, à vérifier l'équation différentielle (11) où $n=4$; le système que vérifient les dérivées du quatrième ordre est alors indéterminé; on peut choisir p_{04} de manière qu'il vérifie l'équation (11) où $n=5$, et ainsi de suite : dans chaque ordre h, à partir du second, il y a une dérivée p_{0h} qui n'est déterminée que par une équation différentielle du premier ordre; elle dépend donc d'une constante arbitraire et nous pouvons déterminer formellement un développement en série de z, où figurera, comme nous venons de le préciser, une infinité de constantes arbitraires. On démontre que cette série est convergente sous des conditions que nous supposerons vérifiées. Par suite, *par une caractéristique du second ordre, il passe une famille de surfaces intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.*

Ce calcul permet de compléter la théorie des caractéristiques du premier ordre. En effet, choisissons t, que nous avons laissé arbitraire, de manière que

$$\left(\frac{df}{dy}\right)+\frac{ds}{dx}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy}=0; \tag{12}$$

t dépend encore d'une constante arbitraire et tous les nombres x, y, z, p, q, r, s, t qui vérifient (4), (5), (6), (7), (8), (12) sont, quelle que soit cette constante, les éléments d'une caractéristique du second ordre. Il en résulte d'abord que *toute caractéristique du premier ordre fait partie d'une infinité de caractéristiques du second ordre, dépendant d'une constante arbitraire* et ensuite que, *par une caractéristique du premier ordre, il passe une infinité de surfaces intégrales, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires.*

5. Propriétés des caractéristiques du premier et du deuxième ordre. — Soit x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 un élément d'une caractéristique du premier ordre M_1. L'équation différentelle (12), quand on y a remplacé r et s par leur valeur tirée du système S' (n° 3), devient une équation du premier ordre en t qui admet une solution unique se réduisant à t_0 quand $x=x_0$. Si donc, deux surfaces intégrales ayant en commun tous les éléments de M_1 ont un contact du second ordre au point x_0, y_0, z_0, la valeur de t qui est, pour les deux surfaces, égale à t_0 quand $x=x_0$, reste la même pour ces deux surfaces tout le long

de la caractéristique; il en est de même des valeurs de r et de s et, par suite, *si deux surfaces intégrales ont en commun tous les éléments d'une caractéristique du premier ordre et un contact du second ordre en un de ces éléments, elles ont un contact du second ordre tout le long de la caractéristique.*

On peut démontrer un théorème analogue pour les caractéristiques du second ordre. Plus généralement, *si deux surfaces ont un contact d'ordre n en un des éléments d'une caractéristique commune du second ordre, elles ont un contact d'ordre n tout le long de cette caractéristique.* En effet, toutes les dérivées d'ordre n s'expriment en fonction linéaire de p_{0n} et celle-ci est déterminée par l'équation

$$\left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)+R\frac{dp_{1,n-1}}{dx}+T\frac{dp_{0,n}}{dy}=0.$$

C'est encore, tous les calculs faits, une équation différentielle du premier ordre en p_{0n}, sur laquelle on raisonne comme sur l'équation (12).

6. **Caractéristiques d'ordre n.** — Considérons le système S du n° 1 où l'on fait $F=r+f$. L'équation

$$p_{2,0}+f(x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, p_{1,1}, p_{0,2})=0$$

permet, par des différentiations successives, de calculer tous les nombres $p_{2,k}$ en fonction des nombres $p_{i,j}$ où $i+j\leqq 2+k$, $i=0$ ou 1. Si $p_{2,h}$ est ainsi exprimé, $p_{3,h}$ ne renfermera que des nombres $p_{i,j}$ où i vaut zéro ou 1; les nombres $p_{2,k}$ étant remplacés par leur valeur, $p_{3,h}$ ne contiendra plus que des nombres $p_{i,j}$ où i vaut 0 ou 1. De proche en proche, on voit ainsi que tous les nombres $p_{i,k}$, où $i+k=n-1$, seront déterminés dès que l'on connaîtra $p_{0,n-1}$ et $p_{1,n-2}$. Le système S se réduit alors aux seules équations

$$dz=p_{1,0}\,dx+p_{0,1}\,dy,$$
$$dp_{1,0}=p_{2,0}\,dx+p_{1,1}\,dy,\quad \ldots,\quad dp_{1,n-2}=p_{2,n-2}\,dx+p_{1,n-1}\,dy,$$
$$dp_{0,1}=p_{1,1}\,dx+p_{0,2}\,dy,\quad \ldots,\quad dp_{0,n-1}=p_{1,n-1}\,dx+p_{0,n}\,dy,$$

dans lesquelles on a

$$p_{2,i}+\left(\frac{d^i f}{dy^i}\right)+\frac{\partial f}{\partial s}p_{1,i+1}+\frac{\partial f}{\partial t}p_{0,i+2}=0\qquad(i=0, 1, \ldots, n-2),$$

En particulier, les dérivées d'ordre n sont données par les trois relations

$$\frac{dp_{1,n-2}}{dx} = p_{2,n-2} + p_{1,n-1}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dp_{0,n-1}}{dx} = p_{1,n-1} + p_{0,n}\frac{dy}{dx},$$

$$p_{2,n-2} + \left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right) + \frac{\partial f}{\partial s}p_{1,n-1} + \frac{\partial f}{\partial t}p_{0,n} = 0,$$

d'où l'on tire :

$$p_{0n}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t}\right] + \frac{dp_{1,n-2}}{dx} + \frac{dp_{0,n-1}}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right) = 0.$$

Si $\frac{dy}{dx} = m_1$, par exemple, p_{0n} n'est pas déterminé et il est arbitraire si

$$(13) \qquad \frac{dp_{1,n-2}}{dx} + m_2\frac{dp_{0,n-1}}{dx} + \left(\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}\right) = 0.$$

Il est alors naturel d'appeler *caractéristique d'ordre* $n-1$ toute multiplicité M_{n-1} d'éléments d'ordre $\leqq n-1$, qui vérifie le système

$$S_1 \begin{cases} dz = p_{1,0}\,dx + p_{0,1}\,dy, & \dots\dots \quad \frac{dy}{dx} = m_1. \\ dp_{1,0} = p_{2,0}\,dx + p_{1,1}\,dy, & \dots, \quad dp_{1,n-3} = p_{2,n-3}\,dx + p_{1,n-2}\,dy, \\ dp_{0,1} = p_{1,1}\,dx + p_{0,2}\,dy, & \dots, \quad dp_{0,n-2} = p_{1,n-1}\,dx + p_{0,n-1}\,dy \end{cases}$$

et l'équation (13). Pour avoir une caractéristique d'ordre n, il suffira, d'après cette définition, d'ajouter aux équations précédentes, les trois relations

$$(14) \begin{cases} dp_{1,n-1} = p_{2,n-2}\,dx + p_{1,n-1}\,dy, \qquad dp_{0,n-1} = p_{1,n-1}\,dx + p_{0,n}\,dy, \\ \frac{dp_{1,n-1}}{dx} + m_2\frac{dp_{0,n}}{dx} + \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0. \end{cases}$$

Mais les deux premières entraînent la relation (13); il suffit donc de remplacer dans le système S_1 et l'équation (13), n par $n+1$.

7. **Propriétés des caractéristiques d'ordre n.** — Ces multiplicités sont définies par $2n+1$ équations contenant $2n+3$ variables; il en existe une infinité, dépendant d'une fonction arbitraire et l'on voit comme au n° 4 qu'il y a une famille de surfaces intégrales, dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, qui passent par l'une d'elles.

De plus, si l'on connaît une caractéristique d'ordre $n-1$, on aura toutes les caractéristiques d'ordre n à laquelle elle appartient en résolvant en $p_{1,n-1}$ et p_{0n} les deux dernières équations (14) par exemple. On est ainsi amené à une équation différentielle du premier ordre, où le coefficient de $\frac{dp_{0,n}}{dx}$ est $m_2 - m_1$, pour déterminer p_{0n}. Par suite, *toute caractéristique d'ordre $n-1$ appartient à une famille de caractéristiques d'ordre n dépendant d'une constante arbitraire.* Plus généralement, le même raisonnement répété r fois montre que *toute caractéristique d'ordre n appartient à une famille de caractéristiques d'ordre $n+r$, dépendant de r constantes arbitraires.*

Enfin, la même démonstration que celle du n° 5 nous permet de conclure que *si deux surfaces intégrales ont un contact d'ordre $n+p$ en un élément d'une caractéristique commune d'ordre n elles ont un contact d'ordre $n+p$ tout le long de cette caractéristique.*

8. **Conclusion de l'étude des caractéristiques.** — Les analogies entre les équations du premier ordre et celles du second nous apparaissent dès lors si nombreuses qu'il semble naturel de tenter d'appliquer au problème de l'intégration des équations du second ordre la méthode qui a réussi à Cauchy dans le cas du premier. Nous avons trouvé que chaque surface intégrale est un lieu de multiplicités caractéristiques, dont les éléments vérifient un système différentiel qu'on peut former sans connaître l'équation de la surface. Puisque l'équation proposée fait partie de ce système, il est clair que toute surface lieu de pareilles multiplicités est une surface intégrale; il semble donc qu'il n'y a qu'à déterminer ces multiplicités et à les assembler de manière qu'elles engendrent des surfaces.

Mais nous avons remarqué que le système différentiel qu'il faut résoudre contient, quel que soit n, deux variables de plus qu'il n'y a d'équations. Pour l'intégrer, il faudra introduire une fonction arbitraire qui rendra impossible, sauf dans des cas particuliers, la recherche effective de l'intégrale générale.

Il est d'ailleurs facile de se rendre compte jusqu'où on peut aller dans cette voie. Aux équations des caractéristiques du second ordre, adjoignons une autre équation quelconque du second ordre, qu'on

peut toujours écrire

$$t + \varphi(x, y, z, p, q, s) = 0.$$

La solution qui, pour $x = 0$, prend les valeurs y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 sera représentée par les formules

$$y = \psi_1, \quad z = \psi_2, \quad p = \psi_3, \quad q = \psi_4, \quad r = \psi_5, \quad s = \psi_6, \quad t = \psi_7,$$

ψ_i étant une fonction de $x, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$. En prenant z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 fonctions de y_0, un calcul identique à celui fait par Cauchy pour le premier ordre, montre que les multiplicités à deux paramètres ainsi obtenues sont situées sur des surfaces intégrales sous les conditions nécessaires et suffisantes

$$r_0 + f_0 = 0, \quad t_0 + \varphi_0 = 0, \quad z'_0 = q_0, \quad p'_0 = s_0, \quad q'_0 = t_0,$$
$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = s'_0 + m_1^0 t'_0;$$

les accents désignent les dérivées par rapport à y_0. On en conclut que r_0, s_0, t_0, q_0 sont des fonctions connues de z_0 et p_0, ceux-ci étant déterminés par un système de la forme

$$p''_0 = \Phi_1(y_0, z_0, z'_0, p_0, p'_0), \qquad z''_0 = \Phi_2(y_0, z_0, z'_0, p_0, p'_0).$$

En général, le système considéré n'admettra donc comme solution que des surfaces qui dépendent au plus de quatre paramètres arbitraires : les formules obtenues ne peuvent représenter l'intégrale générale.

Il semble donc qu'il faille renoncer à utiliser la théorie des caractéristiques. Mais il est bien évident que le problème que nous venons d'étudier peut s'énoncer ainsi : *quelles sont les solutions communes aux deux équations*

$$r + f = 0, \qquad \psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

En général, on n'obtiendra, d'après ce que nous venons de voir, que des intégrales communes dépendant d'un nombre fini de paramètres arbitraires. Mais une question se pose ainsi d'elle-même : *n'est-il pas possible d'adjoindre à l'équation proposée une équation qui admette en commun avec elle des intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires?* Le Chapitre suivant nous appren-

dra à en décider et à préciser la façon dont les solutions communes dépendent des arbitraires.

CHAPITRE II.

INVOLUTIONS. INVARIANTS.

9. Involutions. — Proposons-nous de chercher s'il existe une équation E, d'ordre n, qui admette avec $r+f=0$ une famille d'intégrales communes dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. En remplaçant, dans E, les nombres $p_{i,k}$ par leur valeur en fonction de ceux où i vaut 0 ou 1, on peut l'écrire

$$E = \varphi(x, y, z, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} \neq 0.$$

Cherchons le développement en série d'une intégrale commune. Si pour $x = x_0$, $y = y_0$, on se donne des valeurs de $z, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}$ satisfaisant aux deux équations, on pourra d'abord (n° 6) calculer tous les nombres p_{ik} où $i+k \leqq n$. Pour calculer les dérivées d'ordre $n+1$, on a les trois relations

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = \left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{2,n-1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} p_{1,n} = 0, \\ \dfrac{d\varphi}{dy} = \left(\dfrac{d\varphi}{dy}\right) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} p_{0,n+1} = 0, \\ \dfrac{d^{n-1}(r+f)}{dy^{n-1}} = p_{2,n-1} + \dfrac{\partial f}{\partial s} p_{1,n} + \dfrac{\partial f}{\partial t} p_{0,n+1} + \left(\dfrac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right) = 0. \end{cases}$$

On dit que *l'équation* E *est en involution avec la proposée si ces trois équations se réduisent à deux.* Un calcul déjà fait (n° 6) montre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$H = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0n}} + \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\right)^2 = 0,$$

$$K = \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

La première relation montre qu'il y aura deux séries possibles d'équations en involution, suivant le rapport $\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} : \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}$ sera égal à m_1 ou m_2. Nous dirons que *le système* I *de caractéristiques admet une involution d'ordre n*, s'il existe une fonction $\varphi(x, y, z, p_{1,0}, \ldots,$

$p_{1,n-1}$; $p_{0,1}$, ..., $p_{0,n}$) vérifiant le système A :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} - m_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} = 0,\\ &\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_1\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

On définit de même les involutions du système II.

10. **Invariants.** — Nous introduirons immédiatememt une distinction très importante. Si le système A n'est vérifié qu'en tenant compte de l'équation $\varphi=0$, on dit qu'il existe une involution d'ordre n. S'il existe une fonction φ vérifiant *identiquement* le système A, il est évident, d'après la forme de ce système, qu'il est vérifié par toutes les fonctions $\varphi - c$, c étant une constante quelconque. Toutes les équations $\varphi = c$ sont en involution avec la proposée, quel que soit c. On dit alors que *le système* I *admet un invariant d'ordre n.* Cette dénomination est justifiée par l'importante propriété suivante : *lorsqu'on se déplace sur une caractéristique d'ordre n d'un systéme qui admet un invariant φ de même ordre, la valeur de φ reste constante au cours du déplacement.*

Désignons en effet par δ tout déplacement sur la caractéristique. On a :

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,0}}\delta p_{1,0} + \dots$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\delta p_{1,n-1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,1}}\delta p_{0,1} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}}\delta p_{0,n},$$

ce qui s'écrit, en tenant compte des équations des caractéristiques d'ordre n (n° 6),

$$\delta\varphi = \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + m_1\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\right]\delta x$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}}\delta p_{0,n} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\left[\left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\delta x + m_2\,\delta p_{0n}\right];$$

$\delta\varphi$ est donc nul, en tenant compte des équations (A).

Ce résultat peut encore s'énoncer ainsi : *la condition nécessaire est suffisante pour qu'il existe un invariant d'ordre n est qu'il existe une combinaison intégrable pour le système différentiel*

qui définit les caractéristiques du même ordre, et il est clair que les équations de toutes les caractéristiques d'ordre supérieur admettront la même combinaison intégrable.

Pour savoir ce que devient cette propriété dans le cas d'une involution, supposons l'équation $\varphi=0$ résolue par rapport à $p_{1,n-1}$. La première équation (A) montre immédiatement qu'on peut écrire

$$\varphi \equiv p_{1,n-1}+m_2 p_{0,n}+u(x, y, z, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-2}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}),$$

à condition que n soit supérieur à 2, ce que nous supposerons désormais. En utilisant les résultats et adoptant les notations de M. Gau [1] on a

$$\left(\frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right)=\mathrm{M}_{n-1} p_{1,n-1}+\mathrm{N}_{n-1} p_{0,n}+\mathrm{I}_{n-1}.$$

I_{n-1} ne dépendant pas des dérivées d'ordre n et M_{n-1} et N_{n-1} ayant pour valeur

$$\mathrm{M}_{n-1}=(n-1) \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial p}, \qquad \mathrm{N}_{n-1}=(n-1) \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial q}.$$

En écrivant que la seconde relation (A) a lieu identiquement quand on y remplace $p_{1,n-1}$ par $-m_2 p_{0n}-u$, on obtient les conditions

$$\Sigma \quad \left\{\begin{aligned} & (m_1-m_2)\left(\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}}-m_2 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\right) \\ & \qquad =\frac{dm_2}{dx}+m_1 \frac{dm_2}{dy}+m_2 \mathrm{M}_{n-1}-\mathrm{N}_{n-1}, \\ & \left(\frac{du}{dx}\right)+m_1\left(\frac{du}{dy}\right)-\frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}}\left(\frac{d^{n-2} f}{dy^{n-2}}\right) \\ & \qquad =\mathrm{I}_{n-1}+u\left\{\frac{m_1 \mathrm{M}_{n-1}-\mathrm{N}_{n-1}+\dfrac{dm_2}{dx}+m_1 \dfrac{dm_2}{dy}}{m_2-m_1}\right\}. \end{aligned}\right.$$

M. Gau (*loc. cit.*) a donné une forme condensée remarquable à ces conditions : en désignant par δ un déplacement sur la caractéristique d'ordre n et posant

$$\mathrm{A}=-\frac{dm_1}{dy}, \qquad \mathrm{B}=\frac{dm_1}{dy}+\frac{\dfrac{dm_2}{dx}+m_1 \dfrac{dm_2}{dy}+m_1 \dfrac{\partial f}{\partial p}-\dfrac{\partial f}{\partial q}}{m_2-m_1},$$

---

(1) GAU, *Thèse de Doctorat*, Gauthier-Villars, 1911, p. 7 et 8.

on obtient

$$(3)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi(\mathrm{A}n + \mathrm{B}) \qquad \text{si} \qquad n > 3.$$

$$(4)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi(3\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \frac{\varphi^2}{m_2 - m_1}\left(\frac{\partial m_1}{\partial t} - m_1\frac{\partial m_1}{\partial s}\right) \qquad \text{si} \qquad n = 3.$$

Supposons alors qu'au début du déplacement, on ait $\varphi = 0$; au cours du déplacement sur la caractéristique, φ n'est fonction que d'une variable x, par exemple, et satisfait aux équations différentielles (3) ou (4). D'après la forme de ces équations, puisque $\varphi = 0$ pour la valeur initiale de x, *on aura $\varphi = 0$ durant tout le déplacement.*

11. Solutions communes à deux équations en involution. — Si nous reprenons maintenant le calcul du n° 9 en posant

$$\varphi = p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u$$

il est clair que les trois équations (1) de ce paragraphe sont liées par la relation

$$\frac{d\varphi}{dx} + m_1\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d^{n-1}(r+f)}{dy^{n-1}},$$

si $\varphi = 0$ est en involution avec la proposée ; p_{0n+1} reste arbitraire De même, les dérivées d'ordre $n+2$ sont déterminées par les trois relations

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^n(r+f)}{dy^n} = 0,$$

et l'on a identiquement

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + m_1\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{dm_1}{dy}\,\frac{d\varphi}{dy} \equiv \frac{d^n(r+f)}{dy^n}.$$

Si l'on remplace dans cette identité les dérivées d'ordre $n+1$ par leur valeur, $\frac{d\varphi}{dy}$ s'annule et l'on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + m_1\frac{d^2\varphi}{dy^2} \equiv \frac{d^n(r+f)}{dy^n}.$$

Une dérivée d'ordre $n+2$, $p_{0,n+2}$ par exemple, reste arbitraire. On démontre sans peine que les trois équations

$$\frac{d^k\varphi}{dx\,dy^{k-1}} = 0, \qquad \frac{d^k\varphi}{dy^k} = 0, \qquad \frac{d^{n+k-1}(r+f)}{dy^{n+k-1}} = 0,$$

qui déterminent les dérivées d'ordre $n+k+1$, sont liées par la relation

$$\frac{d^k\varphi}{dx\,dy^{k-1}} + m_1\frac{d^k\varphi}{dy^k} = \frac{d^{n+k-1}(r+f)}{dy^{n+k-1}}$$

et $p_{0,n+k+1}$ est encore arbitraire. Ainsi, dans chaque ordre à partir du $n^{\text{ième}}$, une des dérivées partielles reste arbitraire, les dérivées jusqu'à l'ordre n inclus étant choisies à l'avance de manière à satisfaire aux deux équations $r+f=0$, $\varphi=0$. Les méthodes du calcul des limites montrent qu'on peut, sous des conditions d'analyticité que nous supposerons remplies, limiter le choix de ces arbitraires de façon que le développement en série de z que nous venons d'obtenir reste convergent dans un certain domaine. *Les deux équations en involution admettent donc une famille de solutions communes*, *dépendant* comme nous venons de l'expliquer *d'une infinité de constantes arbitraires*. Mais, si générale que paraisse la solution ainsi obtenue, elle ne constitue pas encore la solution générale, comme le montre le théorème qui suit.

12. Théorème. — *Par une courbe quelconque* Γ, *il passe, en général, une infinité de surfaces intégrales communes à deux équations en involution, leur équation ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires.*

Sur toute surface intégrale de la proposée, passant par la courbe

$$(\Gamma) \qquad y = g(x), \qquad z = h(x),$$

on a

$$(5)\quad \begin{cases} h'(x) = p + q\,g'(x), \\ \dfrac{dp_{1,k-1}}{dx} = p_{2,k-1} + p_{1,k}\,g'(x), \qquad \dfrac{dp_{0,k}}{dx} = p_{1,k} + p_{0,k+1}\,g'(x), \\ p_{2,k-1} + \dfrac{\partial f}{\partial s}p_{1,k} + \dfrac{\partial f}{\partial t}p_{0,k+1} + \left(\dfrac{d^{k-1}f}{dy^{k-1}}\right) = 0. \end{cases}$$

En prenant q comme inconnue, ces équations permettent de proche en proche de calculer les dérivées d'ordre n en fonction de $x, q, \ldots, \frac{d^{n-1}q}{dx^{n-1}}$. En portant ces expressions dans $\varphi=0$, on obtiendra l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d^{n-1}q}{dx^{n-1}} = \omega\left(x, q, \frac{dq}{dx}, \ldots, \frac{dq^{n-2}}{dx^{n-2}}\right),$$

qui déterminera q à un nombre fini de constantes près. La série

$$z = h(x) + [y - g(x)]\, q(x) + \frac{[y - g(x)]^2}{2} p_{0,2}(x) + \ldots,$$

dont on vient ainsi de déterminer tous les coefficients, est en général convergente et représente évidemment une intégrale commune S qui passe par Γ.

13. Nous allons montrer qu'on peut obtenir S par l'intégration d'un système différentiel. En effet, toute intégrale commune est un lieu de caractéristiques d'ordre n de $r + f = 0$, dont les équations sont, pour le système II,

$$dy = m_2\, dx, \qquad dz = p_{1,0}\, dx + p_{0,1}\, dy,$$

$$dp_{1,0} = p_{2,0}\, dx + p_{1,1}\, dy, \qquad \ldots, \qquad dp_{1,n-2} = p_{2,n-2}\, dx + p_{1,n-1}\, dy,$$

$$dp_{0,1} = p_{1,1}\, dx + p_{0,2}\, dy, \qquad \ldots, \qquad dp_{0,n-1} = p_{1,n-1}\, dx + p_{0,n}\, dy,$$

$$\left(\frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right) dx + dp_{1,n-1} + m_1\, dp_{0n} = 0. \tag{6}$$

Les dérivées d'ordre n, sur une intégrale commune, doivent vérifier identiquement la relation $\varphi = 0$. On a donc

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} p_{1,n} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{2,n-1} = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n}} p_{0,n+1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} = 0; \tag{8}$$

quand on se déplace sur la caractéristique on a, d'autre part,

$$\frac{dp_{0,n}}{dx} = p_{1,n} + m_2\, p_{0,n+1}, \tag{9}$$

$$\frac{dp_{1,n-1}}{dx} = p_{2,n-1} + m_2\, p_{1,n}. \tag{10}$$

Les conditions (A) (n° 9) montrent alors qu'on peut remplacer les équations (6), (7) et (8) par les deux suivantes :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{dp_{1,n-1}}{dx} = 0, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}} \frac{dp_{0,n}}{dx} = 0.$$

Entre les $2n + 3$ variables $x, y, z, p_{1,0}, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n}$

on a donc les $2n + 2$ relations

$$(11)\quad \begin{cases} dy = m_2\,dx, \qquad dz = p_{1,0}\,dx + p_{0,1}\,dy, \\ dp_{1,0} = p_{2,0}\,dx + p_{1,1}\,dy, \quad \ldots, \quad dp_{1,n-2} = p_{2,n-2}\,dx + p_{1,n-1}\,dy, \\ dp_{0,1} = p_{1,1}\,dx + p_{0,2}\,dy, \quad \ldots, \quad dp_{0,n-1} = p_{1,n-1}\,dx + p_{0,n}\,dy, \\ \left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\,\dfrac{dp_{1,n-1}}{dx} = 0, \quad \left(\dfrac{d\varphi}{dy}\right) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n+1}}\,\dfrac{dp_{0,n}}{dx} = 0, \end{cases}$$

où l'on suppose tous les nombres $p_{i,k}$ remplacés par leur expression en fonction de ceux où i vaut 0 ou 1. Ce système différentiel définit les *caractéristiques communes* aux deux équations données en involution et toutes les surfaces intégrales communes sont des lieux de ces caractéristiques. Pour déterminer celle qui passe par Γ, choisissons une solution q de E (n° 12); y, z, p_{ik} ($i + k \leq n$, $i = 0$ ou 1) sont déterminés en fonction de x par les équations (5) et prennent, pour $x = x_0$, un ensemble de valeurs déterminées que nous désignerons par E_0. Il existe une solution et une seule du système (11), qui, pour $x = x_0$, prenne l'ensemble des valeurs E_0. Nous la représenterons par les formules

$$(12)\qquad y = u(x, x_0), \qquad z = v(x, x_0), \qquad p_{ik} = P_{ik}(x, x_0),$$

qui se réduisent à l'ensemble E_0, quand on y fait $x = x_0$. Les deux premières, quand on y considère x et x_0 comme deux paramètres indépendants, représentent une surface Σ, qui passe par la courbe Γ, dont l'équation paramétrique est $x = x_0$; quand x_0 est fixe et x variable, les équations (12) représentent une caractéristique commune qui rencontre Γ au point $x = x_0$; Σ, engendrée par des caractéristiques du système II de $r + f = 0$, est donc une intégrale de cette équation.

Je dis qu'elle est aussi une intégrale de $\varphi = 0$. En effet, en tout point M de Γ, passe une courbe caractéristique C' du système I située sur Σ et l'on peut considérer Σ comme engendrée par les courbes C' qui rencontrent Γ. Soit C'_n la caractéristique d'ordre n qui a C' pour support sur Σ. Au point M, d'après la façon même dont on a calculé l'ensemble E_0 des dérivées jusqu'à l'ordre n, celles-ci vérifient l'équation $\varphi = 0$ et lorsqu'on se déplace sur C'_n, nous avons démontré au n° 10 que φ restait constamment nul. On a donc $\varphi = 0$ en tout point de Σ.

14. Proposons-nous maintenant de chercher les solutions communes à $r+f=0$ et aux deux équations $\varphi=0$, d'ordre $h>2$ et $\psi=0$ d'ordre $n>h$, supposées en involution avec la proposée. Deux cas sont à distinguer :

1° *Les deux involutions sont du même système* (I, par exemple). Dans ce cas, les trois équations peuvent ne pas admettre d'intégrale commune; mais, *si elles en ont une, elles en ont une infinité.*

Soient, en effet, une intégrale commune S et une caractéristique M_n de S, d'ordre n et du système II, comprenant une caractéristique M_h, d'ordre h et de même système. Il existe (n° 6) une famille d'intégrales de la proposée, dépendant de la façon que nous avons expliquée d'une infinité de constantes arbitraires, qui ont un contact d'ordre n avec S le long de M_n; l'une quelconque d'entre elles Σ'_1 peut être considérée comme engendrée par des caractéristiques du système I, d'ordre h ou n, issus des éléments de M_h ou M_n. Si l'on se déplace sur ces caractéristiques à partir de ces éléments, on a, au début, $\varphi=0$ et $\psi=0$, puisque M_n et M_h appartiennent à l'intégrale commune S; on a donc (n° 10) $\varphi=0$ et $\psi=0$ en tous points de ces caractéristiques et, par suite, en tout point de Σ. Toutes les surfaces Σ sont donc des intégrales communes.

2° *Les deux involutions sont de système différent.* — Nous supposerons que φ vérifie le système A et ψ le système B, qui s'en déduit par permutation de m_1 et m_2. L'équation $r+f=0$ détermine tous les nombres $p_{i,k}$, où $i+k \leqq h-1$, en fonction de x, y, z, $p_{1,0}, \ldots, p_{1,h-2}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,h-1}$. Les dérivées d'ordre h sont liées par la relation $\varphi=0$ qui donne $p_{1,h-1}$ en fonction des nombres précédents et de $p_{0,h}$; dans chaque ordre j, $h<j<n$, les dérivations de $r+f=0$ et $\varphi=0$ donnent toutes les dérivées d'ordre j, en fonction de p_{0j}, par exemple; tous les nombres $p_{i,k}$, où $i+k \leqq n-1$, s'expriment donc en fonction des inconnues

$$x, \quad y, \quad z, \quad p_{1,0}, \quad \ldots, \quad p_{1,h-2}, \quad p_{0,1}, \quad \ldots, \quad p_{0,n-1}.$$

Les dérivées d'ordre n seront données par les deux relations

$$\frac{d^{n-h}\varphi}{dy^{n-h}}=0, \qquad \psi=0,$$

dont le déterminant fonctionnel $(m_1-m_2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_{1,n-1}}\dfrac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-1}}$ n'est pas

nul et celles de l'ordre $n + j$, par

$$\frac{d^{n+j-h}}{dy^{n+j-h}} = 0, \qquad \frac{d^j \psi}{dy^j} = 0,$$

dont le déterminant fonctionnel est le même. Toutes les dérivées $p_{i,k}$ s'expriment donc en fonction des inconnues précédentes. Mais celles-ci sont solutions du système d'équations aux différentielles totales

$$(13) \begin{cases} dz = p_{1,0}\,dx + p_{0,1}\,dy, \\ dp_{1,0} = p_{2,0}\,dx + p_{1,1}\,dy, \quad \dots \quad dp_{1,h-2} = p_{2,h-2}\,dx + p_{1,h-1}\,dy, \\ dp_{0,1} = p_{1,1}\,dx + p_{1,2}\,dy, \quad \dots \quad dp_{0,n-1} = p_{1,n-1}\,dx + p_{0,n}\,dy, \end{cases}$$

où $p_{2,0}, \dots, p_{2,h-2}$ sont tirés des dérivées de $r + f = 0$; $p_{1,h-1}$, de $\varphi = 0$; $p_{1,j-1}$ $(h < j < n)$ de $\frac{d^{j-h}\varphi}{dy^{j-h}} = 0$; $p_{1,n-1}$ et $p_{0,n}$ du système $\frac{d^{n-h}\varphi}{dy^{h-n}} = 0$, $\psi = 0$. Nous allons montrer que ce système est complètement intégrable.

Les conditions d'intégrabilité sont vérifiées d'elles-mêmes pour les équations qui ne contiennent que les dérivées d'ordre inférieur à h. Pour celles qui contiennent les dérivées d'ordre h, elles seront vérifiées à la condition nécessaire et suffisante que, quel que soit $p_{0,h}$, les équations $r + f = 0$, $\varphi = 0$, et leurs dérivées donnent un système de valeurs unique pour les dérivées d'ordre $h + 1$. Or, celles-ci doivent vérifier les trois relations

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \qquad \frac{d^{h-1}(r + f)}{dy^{h-1}} = 0,$$

qui se réduisent à deux, d'après les conditions d'involution (n° 9). Comme on peut prendre $\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,h-1}} = 1$, la seconde donne toujours, pour $p_{2,h}$ et la première pour $p_{2,h-2}$, une valeur bien déterminée, quel que soit p_{0h}. Il est, de même, necessaire et suffisant, pour que les conditions d'intégrabilité soient remplies pour les équations suivantes, que les relations

$$\frac{d^j \varphi}{dx\,dy^{j-1}} = 0, \qquad \frac{d^j \varphi}{dy^j} = 0, \qquad \frac{d^{h+j-1}(r + f)}{dy^{h+j-1}} = 0 \qquad (h + j < n - 1)$$

déterminent un système de valeurs unique pour $p_{2,h+j-1}$, $p_{1,h+j}$, quels que soient $p_{0,h+1} \dots p_{0,h+j}$; et nous avons vu au n° 11 que

chacun de ces groupes de trois équations est équivalent à un groupe de deux équations linéaires dont le déterminant n'est pas nul. Enfin, les équations

$$\frac{d^{n+1-h}\varphi}{dx\,dy^{n-h}} = 0, \qquad \frac{d^{n+1-h}\varphi}{dy^{n+1-h}} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0,$$
$$\frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d^{n-1}(r+f)}{dy^{n-1}} = 0$$

doivent déterminer un système de valeurs unique pour $p_{2,n-1}$, $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$. Les deux premières entraînent la dernière (n° 11); les trois dernières se réduisent à deux, puisque $\psi = 0$ est en involution avec la proposée; le système se réduit donc à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,h-1}} p_{1,n} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,h}} p_{0,n+1} + \left(\frac{d^{n+1-h}\varphi}{dy^{n+1-h}}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-1}} p_{1,n} + \frac{\partial\psi}{\partial p_{0,n}} p_{0,n+1} + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) = 0,$$
$$p_{2,n-1} + \frac{\partial f}{\partial s} p_{1,n} + \frac{\partial f}{\partial t} p_{0,n+1} + \left(\frac{d^{n-1} f}{dy^{n-1}}\right) = 0,$$

où l'on peut prendre (n° 10)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{1,h-1}} = \frac{\partial\psi}{\partial p_{1,n-1}} = 1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,h}} = m_2, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial p_{0,n}} = m_1.$$

Leur déterminant $m_2 - m_1$ n'est pas nul et nous avons bien démontré que les trois équations $r+f=0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ forment un système complètement intégrable.

Remarque. — Les résultats que nous venons d'obtenir s'appliquent évidemment au cas où l'on connaît un ou deux invariants. En particulier, si l'on connaît deux invariants de même système de l'équation $r+f=0$, les trois équations

$$r+f=0, \qquad \varphi = c, \qquad \psi = c'$$

forment un système complètement intégrable, quels que soient c et c'.

CHAPITRE III.

LA MÉTHODE DE DARBOUX.

L'étude précédente montre que l'existence d'une involution permet de faire un progrès important dans la recherche des intégrales. Nous

allons voir maintenant quels avantages on peut tirer de l'existence d'invariants.

15. Supposons d'abord que l'on connaisse *deux invariants d'un même système* (I, par exemple), u et v, d'ordre h et n. Si, sur une surface intégrale S, nous nous déplaçons le long d'une caractéristique M_n du système I, y, z, et les nombres $p_{i,k}$ sont des fonctions de la seule variable x; il en est donc de même de u et de v et comme ces deux expressions restent constantes durant le déplacement, c'est qu'elles sont liées par une relation de la forme

$$u = \psi(v). \tag{1}$$

Toute surface intégrale de la proposée vérifie donc une équation de la forme (1). Réciproquement, puisque u et v sont deux invariants, la combinaison

$$du - \psi'(v)\, dv = 0$$

fournit, quel que soit ψ, une intégrale première des équations des caractéristiques M_n. L'équation $u - \psi(v) = 0$ est donc toujours en involution avec la proposée. On peut donc former une équation, dépendant d'une fonction arbitraire, $u - \psi(v) = 0$ qui est, quelle que soit la fonction ψ, en involution avec $r + f = 0$. *Nous allons montrer qu'on peut alors résoudre le problème de Cauchy.* En effet, la donnée d'une multiplicité non caractéristique M_1 permet de calculer en fonction de x toutes les dérivées $p_{i,k}$; ce calcul nous fournira les expressions de u et de v en fonction de x et l'identité $u(x) \equiv \psi[v(x)]$ déterminera la fonction ψ. Nous sommes ainsi ramenés à chercher les solutions communes à deux équations déterminées,

$$r + f = 0, \qquad \varphi \equiv u - \psi(v) = 0,$$

qui sont en involution. Nous avons traité le problème aux n°s 12 et 13. Ici, q est donné en fonction de x et l'équation E, au lieu de déterminer q, détermine la forme de ψ, d'une façon unique. Il n'y a donc plus qu'à intégrer le système (11) où φ est remplacé par $u - \psi(v)$, comme nous l'avons fait au n° 13. *La connaissance de deux invariants de même système permet donc de ramener la recherche de l'intégrale générale à l'intégration d'un système différentiel.*

16. Nous supposons maintenant que l'on connaisse *deux invariants de chaque système*, soient u, v; u_1, v_1. Les deux équations

$$u = \varphi(v), \qquad u_1 = \psi(v_1)$$

donnent deux involutions de système différent, quelles que soient les fonctions φ et ψ. Elles forment avec l'équation $r + f = 0$ un système complètement intégrable, dont la solution générale peut s'obtenir en intégrant un système de la forme (13) (n° 14). Si l'on sait intégrer ce système, on pourra obtenir des formules où figureront, outre un nombre fini de constantes d'intégration, les deux fonctions arbitraires φ et ψ. C'est ce qu'on exprime quelquefois brièvement en disant que l'intégrale générale de l'équation donnée dépend de deux fonctions arbitraires. Il est d'ailleurs aisé de voir, comme au n° 15, que *le problème de Cauchy se ramène*, dans ce cas, *à l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales.*

17. **Équations de la première classe.** — Nous appellerons ainsi toutes celles dont l'intégrale générale est de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} x = V_1[\alpha, \varphi(\alpha), \ldots, \varphi^{(h)}(\alpha), \beta, \psi(\beta), \ldots, \psi^{(l)}(\beta), F_1, F_2, \ldots, F_k], \\ y = V_2[\alpha, \varphi(\alpha), \ldots, \varphi^{(h)}(\alpha), \beta, \psi(\beta), \ldots, \psi^{(l)}(\beta), F_1, \ldots, F_k], \\ z = V_3[\alpha, \varphi(\alpha), \ldots, \varphi^{(h)}(\alpha), \beta, \psi(\beta), \ldots, \psi^{(l)}(\beta), F_1, \ldots, F_k], \end{cases}$$

les fonctions V_1, V_2, V_3 étant déterminées, φ et ψ étant deux fonctions arbitraires de α et de β respectivement, et les fonctions F_j étant des solutions déterminées d'un système complètement intégrable aux différentielles totales :

$$(3)\quad \begin{aligned} dF_j = {} & \Phi_j(\alpha, \varphi, \ldots, \varphi^{(h)}, \beta, \psi, \ldots, \psi^{(l)}, F_1, F_2, \ldots, F_k)\, d\alpha \\ & + \Psi_j(\alpha, \varphi, \ldots, \varphi^{(h)}, \beta, \psi, \ldots, \psi^{(l)}, F_1, \ldots, F_k)\, d\beta \\ & (j = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}$$

Toute équation de la première classe est intégrable par la méthode de Darboux ([1]). En effet, les formules

$$dz = p_{1,0}\, dx + p_{0,1}\, dy, \qquad dp_{i,k} = p_{i+1,k}\, dx + p_{i,k+1}\, dy$$

permettent, en supposant $\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)} \neq 0$, de calculer tous les nombres $p_{i,k}$

([1]) *Voir* GOURSAT, *Leçons*, t. II, Chap. VIII.

en fonction de α et de β et il y a, par hypothèse, entre x, y, z, p, q, r, s, t une relation qu'on peut toujours supposer de la forme

$$E \equiv r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0.$$

S'il y avait, entre les dérivées partielles de z, une autre relation E', indépendante de φ et ψ, qui ne soit pas une conséquence algébrique de E, les formules (2) représenteraient les intégrales communes à E et E' et non l'intégrale générale de E, ce qui est contraire à l'hypothèse : il est donc en particulier impossible qu'il existe une telle relation entre les nombres $p_{i,k}$ où i vaut 0 ou 1, car une telle relation ne peut être une conséquence algébrique de E.

Remarquons qu'on peut calculer ces dérivées par les formules

$$dp_{0,2} = p_{1,2}\, dx + p_{0,3}\, dy, \qquad \ldots, \qquad dp_{0,i} = p_{1,i}\, dx + p_{0,i+1}\, dy.$$

Soient

$$p_{0,i} = P_{0,i}[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \ldots \beta, \psi(\beta), \psi'(\beta), \ldots F_1, \ldots, F_k]$$

les expressions ainsi obtenues. Si $P_{0,i}$ ne contient jamais que les dérivées d'ordre au plus égal à h de la fonction $\varphi(\alpha)$, les formules (3) représentent des surfaces qui dépendent, non d'une fonction arbitraire, mais de $h+1$ constantes arbitraires, ce qui est contraire à nos hypothèses. Il faut donc qu'à partir d'un certain ordre i, $P_{0,i}$ contienne $\varphi^{(h+1)}(\alpha)$. Les équations

$$\varphi^{(h+2)} \frac{\partial P_{0,i}}{\partial \varphi^{(h+1)}} + \left(\frac{dP_{0,i}}{d\alpha}\right) = p_{1,i}\frac{dx}{d\alpha} + p_{0,i+1}\frac{dy}{d\alpha},$$
$$\frac{dP_{0i}}{d\beta} = p_{1,i}\frac{dx}{d\beta} + p_{0,i+1}\frac{dy}{d\beta}$$

montrent alors que $p_{1,i}$ et $p_{0,i+1}$ contiennent $\varphi^{(h+2)}$; par suite, $p_{1,i+m-2}$ et $p_{0,i+m-1}$ contiennent linéairement $\varphi^{(h+m)}$.

Dans la suite de relations,

$$(4)\quad \begin{cases} p_{0,i} = P_{0,i}, \quad p_{1,i-1} = P_{1,i-1}, \quad \ldots, \quad p_{0,i+m-1} = P_{0,i+m-1}, \\ p_{1,i+m-2} = P_{1,i+m-2}, \end{cases}$$

donnons à la fonction ψ une forme déterminée et considérons β, les fonctions F_j, α, $\varphi(\alpha)$ et ses dérivées comme autant d'inconnues distinctes : il y en a $k+h+m+3$. Les $2(m-1)$ équations (4) étant toutes distinctes, si l'on prend $2(m-1) > k+h+m+3$, c'est-

à-dire $m > k + h + 5$ l'élimination des inconnues fournira au moins une relation

$$H(p_{0,i}, p_{1,i+1}, \ldots) = 0.$$

Supposons que H soit effectivement d'ordre $n = i + \mu - 1$. Toutes les surfaces intégrales de E qui correspondent à la fonction $\psi(\beta)$ que nous avons choisie et à des fonctions $\varphi(\alpha)$ quelconques sont des intégrales communes à $E = 0$ et à $H = 0$. Considérons une intégrale commune qui corresponde à une fonction déterminée $\varphi(\alpha)$; elle restera une intégrale commune, d'après la façon même dont H a été obtenue, si l'on y remplace $\varphi(\alpha)$ par une fonction $\Phi(\alpha)$ assujettie seulement à avoir ses dérivées jusqu'à l'ordre $h + \mu$ identiques à celles de $\varphi(\alpha)$, les autres restant arbitraires. La valeur de $p_{0,n+1}$ pour cette intégrale commune dépend de $\Phi_{(\alpha)}^{(h+\mu+1)}$, qui est arbitraire et par suite, on peut assigner à $p_{0,n-1}$ telle valeur que l'on voudra : les deux équations $E = 0$ et $H = 0$ sont donc en involution (n° 9).

Supprimons dans les relations (4), la ligne où figurent les deux dérivées d'ordre n et ajoutons les deux équations

$$p_{0,i+m} = P_{0,i+m}, \qquad p_{1,i+m-1} = P_{1,i+m-1}.$$

Le même raisonnement nous permettra de former une autre équation, d'ordre $n' \neq n$, en involution avec E_1 et l'on pourra obtenir ainsi autant d'involutions qu'on voudra. On en conclut l'existence de deux invariants; nous montrerons en effet, dans un prochain paragraphe, qu'elle découle de l'existence de trois involutions distinctes d'ordre supérieur à 3.

Il est facile de spécifier le système de caractéristiques auquel appartiennent ces invariants. On peut, en effet, supposer $n > 3$; H ne contient alors les dérivées d'ordre n que par l'intermédiaire de $p_{1,n-1} + m_1 p_{0,n}$, par exemple. Si l'on élimine $\varphi^{(h+\mu)}$ entre les deux relations

$$p_{0,n} = P_{0,n} \qquad \text{et} \qquad p_{1,n-1} = P_{1,n-1},$$

le résultat de l'élimination est évidemment

$$\frac{dP_{0,n-1}}{d\beta} = p_{1,n-1}\frac{dx}{d\beta} + p_{0,n}\frac{dy}{d\beta}$$

et il ne doit plus être fonction que de $p_{1,n-1} + m_r p_{0,n}$. On a donc

$$\frac{dy}{d\beta} = m_1 \frac{dx}{d\beta}.$$

En permutant le rôle de α et de β, on démontrerait de même que

$$\frac{dy}{d\alpha} = m_1 \frac{dx}{d\alpha}.$$

Les caractéristiques du système I comprennent toutes l'équation

$$dy = m_1\, dx.$$

Elle s'écrit, en tenant compte des relations précédentes et supposant $m_2 - m_1 \neq 0$, $d\beta = 0$. Les courbes $\beta = \beta_0$ sont des caractéristiques des surfaces intégrales et les invariants dont nous avons démontré l'existence appartiennent au système $\beta = \text{const.}$ De même, les courbes $\alpha = \text{const.}$ sont des caractéristiques; il y a aussi deux invariants pour le système $\alpha = \text{const.}$ et notre théorème est démontré.

En particulier, les équations qui admettent une intégrale générale explicite s'intégreront par la méthode de Darboux, dont l'importance est ainsi mise en évidence.

18. **Recherche des invariants et des involutions.** — Nous sommes donc amenés à chercher à quelles conditions une équation admet un invariant. D'autre part, s'il existe trois fonctions d'ordre n, n', n'' vérifiant des identités de la forme [n° 9, (3)]

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \varphi_n(\mathrm{A}\, p + \mathrm{B}), \qquad \frac{\partial \varphi_{n'}}{\partial x} = \varphi_{n'}(\mathrm{A}\, p' + \mathrm{B}), \qquad \frac{\partial \varphi_{n''}}{\partial x} = \varphi_{n''}(\mathrm{A}\, p'' + \mathrm{B}),$$

où n est supérieur à n' et n'', et p' différent de p'', on en déduit que l'expression $\varphi_n^{p'-p''}\varphi_{n'}^{p''-p}\varphi_{n''}^{p-p'}$ est un invariant. *Si l'on connaît trois involutions, on pourra former un invariant; si l'on en connaît quatre, on aura deux invariants* (¹). La connaissance d'une involution est donc un premier pas dans la voie des recherches des invariants.

Il est d'ailleurs facile de préciser l'ordre de difficulté des deux problèmes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une involution n'est pas, comme on pourrait le croire, qu'il existe un nombre φ, vérifiant la relation

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi(\mathrm{A}\, n + \mathrm{B}),$$

(¹) *Voir* GAU, *Thèse*, p. 14.

il faut, en outre, s'assurer que la fonction φ peut s'annuler. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une involution est que le système Σ du n° 10 admette une solution : il est, en effet, exactement équivalent à la relation (5) où l'on aurait fait

$$\varphi = p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u$$

et la fonction φ ainsi explicitée peut évidemment s'annuler.

Écrivons Σ sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial p_{0,n-1}} + m_2 \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-2}} = C_{n-1},$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{\partial u}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-2} f}{dy^{n-2}}\right) = u\, D_{n-1} + J_{n-1}.$$

Nous aurons des conditions d'existence qui se présenteront en général sous la forme $a + bu = 0$. Si l'un des coefficients b n'est pas nul, il faudra écrire que la fonction $-\frac{a}{b}$ vérifie le système; s'il en est ainsi, Σ admettra la solution $\frac{a}{b}$.

Supposons qu'il admette deux solutions u_1 et u_2. Le système

$$\frac{\partial v}{\partial p_{0,n-1}} - m_2 \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-2}} = 0, \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{dv}{dy}\right) \frac{\partial v}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-2} f}{dy^{n-2}}\right) = D_{n-1}$$

admet les deux solutions $L(u - u_1)$ et $L(u_2 - u_1)$, u étant une solution de Σ. Le système

$$\frac{\partial w}{\partial p_{0,n-1}} - m_2 \frac{\partial w}{\partial p_{1,n-2}} = 0, \qquad \left(\frac{dw}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{dw}{dy}\right) - \frac{\partial w}{\partial p_{1,n-1}} \left(\frac{d^{n-2} f}{dy^{n-2}}\right) = 0$$

admet la solution $L\left(\frac{u - u_1}{u_2 - u_1}\right)$, ce qui revient à dire que cette expression est un invariant d'ordre inférieur à n. S'il en existe un, w, on a

$$u = u_1(1 - w) + u_2 w;$$

s'il n'y a pas d'invariant d'ordre inférieur à n, toute solution du système Σ est de la forme

$$u = u_1(1 - c) + c u_2 \qquad (c = \text{const.})$$

et l'expression $\frac{p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u_1}{u_2 - u_1}$ est un invariant d'ordre n.

Si tous les coefficients b sont nuls, tous les coefficients a doivent être nuls; le système Σ doit alors être équivalent à un système

complet

$$X_i(u) = \alpha_i u + \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

tel que toute équation

$$X_i[X_j(u) - \alpha_j u - \beta_j] - X_j[X_i(u) - \alpha_i u - \beta_i] = 0$$

soit une combinaison linéaire des équations du système. On doit donc avoir

$$X_i(X_j) - X_j(X_i) - \alpha_j X_i + \alpha_i X_j \equiv \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_h X_h,$$
$$X_i(\alpha_j) - X_j(\alpha_i) \equiv \alpha_1 \lambda_1 + \ldots + \alpha_h \lambda_h,$$
$$X_i(\beta_j) - X_j(\beta_i) \equiv \beta_1 \lambda_1 + \ldots + \beta_h \lambda_h,$$

conditions qui expriment que les systèmes $X_i(u) = u\alpha_i$ et $X_i(u) = \beta_i$ admettent respectivement les solutions u_1 et u_2; le système donné admet alors la solution $u_1 + Cu_2$, quelle que soit la constante C et l'expression $\frac{p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u_1}{u_2}$ est un invariant.

19. Réciproquement, si H est un invariant d'ordre $n > 3$, on peut tirer de $H = C$ une équation de la forme

$$p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u(x, y, z, \ldots, c) = 0,$$

en involution avec la proposée, quel que soit C. Tous les nombres u sont solutions de Σ; si l'on désigne deux d'entre eux par u_1 et u_2, $u = u_1 + w(u_2 - u_1)$, w étant une constante ou un invariant d'ordre inférieur à n et de même système que H. L'expression $\frac{p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u_1}{u_2 - u_1}$ reste donc constante quand on se déplace sur une caractéristique de ce système, ce qui revient à dire qu'on peut remplacer H par l'invariant $\frac{p_{1,n-1} + m_2 p_{0,n} + u_1}{u_2 - u_1}$.

Tout invariant d'ordre $n > 3$ peut donc être mis sous une forme linéaire par rapport aux dérivées d'ordre n. Si $n = 3$, le système Σ prend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial p_{0,2}} - m_2 \frac{\partial u}{\partial p_{1,1}} = au + b,$$
$$\left(\frac{du}{dx}\right) + m_1 \left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{\partial u}{\partial p_{1,1}} \left(\frac{df}{dy}\right) = cu^2 + lu + m$$

et il peut exister deux solutions isolées; s'il y en a 3, le calcul de

Riccati montre qu'il y en a une infinité dépendant d'une constante arbitraire $p_{1,2}+m_2p_{0,3}+\frac{u_1+Cu_2}{v_1+Cv_2}$; l'expression $\frac{v_1(p_{1,2}+m_2p_{0,3})+u_1}{v_2(p_{1,2}+m_2p_{0,3})+u_2}$ est un invariant du 3[e] ordre et l'on démontre comme plus haut que, réciproquement, tout invariant d'ordre 3 peut se mettre sous cette forme ([1]).

Le problème de la recherche des involutions et des invariants conduit donc, dans tous les cas, à discuter le même système; les *solutions isolées* correspondent *aux involutions;* les *familles de solutions* dépendant d'une constante arbitraire, *aux invariants.*

20. **Équations intégrables par la méthode de Darboux.** — Ce sont celles qui admettent deux invariants distincts pour un des systèmes au moins. On peut montrer qu'*il suffit*, pour qu'il en soit ainsi, *de connaître trois involutions d'ordre différent et supérieur à* 3. En effet, on connaît alors un invariant qu'on peut toujours écrire

$$H\equiv v(p_{1,n-1}+m_2p_{0,n}+u)\equiv v\varphi;$$

on a alors

$$\frac{\partial H}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial L\varphi}{\partial x}=An+B,\qquad \frac{\partial Lv}{\partial x}+An+B=0.$$

D'ailleurs,

$$\frac{dH}{dy}=v\left(p_{1,n}+m_2p_{0,n+1}+p_{0\,n}\frac{dm_2}{dy}+\frac{du}{dy}+\varphi\frac{dLv}{dy}\right)\equiv v\psi$$

et la condition $\frac{\partial H}{\partial x}=0$ donne

$$\frac{d^2H}{dx\,dy}+m_1\frac{d^2H}{dy^2}=-\frac{dH}{dy}\frac{dm_1}{dy}=A\frac{dH}{dy},$$

qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{dH}{dy}=A\frac{dH}{dy}\qquad\text{ou}\qquad \frac{\partial}{\partial x}Lv\psi=A.$$

On a donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\psi[A(n+1)+B],$$

et comme ψ peut s'annuler, $\psi=0$ est une involution d'ordre $n+1$. On connaît donc quatre involutions, et par suite, deux invariants.

Ainsi, sauf quelques cas particuliers, rechercher les équations intégrables par la méthode de Darboux, revient à déterminer les

---

([1]) GAU, *Thèse*, p. 18-22.

fonctions f pour lesquelles les systèmes tels que Σ admettent une solution. Nous allons voir comment, dans le cas le plus simple, on peut transformer et résoudre ce problème.

CHAPITRE IV.

LES ÉQUATIONS $s=f(x, y, z, p, q)$ INTÉGRABLES PAR LA MÉTHODE DE DARBOUX.

21. **Notations.** — Nous poserons

$$\frac{\partial^i z}{\partial x^i}=p_i, \qquad \frac{\partial^k z}{\partial x^k}=q_k.$$

L'équation $s=f$ permet de calculer toutes les dérivées de z au moyen des nombres p_i et q_k; on peut donc écrire toute involution sous la forme

$$\varphi(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)=0.$$

Les conditions d'involution s'obtiennent ici en écrivant que

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}p_{n+1}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}=0,$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}q_{n+1}=0$$

ne déterminent pas l'un des deux nombres p_{n+1} ou q_{n+1}. Il faut donc et suffit que φ soit solution d'un des systèmes

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial q_n}=0, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}=0,$$
$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}=0, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}=0.$$

La première équation de (A), par exemple, montre que φ ne dépend pas de q_n; comme les expressions $\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}$ ne peuvent dépendre que de x, y, z, q_1, p_1, ..., p_n, dans la seconde équation, le coefficient de q_n, $\frac{\partial\varphi}{\partial q_{n-1}}$, dans $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$, doit être nul; on voit, de proche en proche, que φ ne peut dépendre des variables q_i; il doit donc exister une fonction $\varphi(x, y, z, p_1, \ldots, p_n)$ vérifiant la relation

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\frac{df}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\ldots+\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}=0.$$

Si cette relation a lieu identiquement, φ est un invariant d'ordre n. En particulier $x = c$ est toujours un invariant. Si la relation n'a lieu qu'en tenant compte de l'équation $\varphi = 0$, résolvons celle-ci par rapport à p_n. L'équation

$$p_n + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0$$

est en involution avec la proposée si

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}}\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} \equiv 0,$$

quand on y remplace p_n par $-\psi$, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} + f\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + \frac{df}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}}\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}} + \left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) \equiv \psi\frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Si l'on adjoint à cette relation la condition $\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0$, on a encore un système analogue à Σ. Les involutions correspondent aux solutions isolées; les invariants, aux solutions dépendant linéairement d'une constante arbitraire; on démontre, comme au n° 19, que tous les invariants d'ordre $n > 1$ sont de la forme $a(p_n + \psi)$, a et q étant au plus d'ordre $n - 1$. Le calcul direct donne les mêmes conclusions pour $n = 1$.

On peut encore écrire la relation précédente sous la forme remarquable

$$\frac{\delta}{\delta x}(p_n + \psi) = \frac{\partial f}{\partial p_1}(p_n + \psi).$$

22. Conditions nécessaires pour qu'il existe un invariant d'ordre $n > 2$. — On connaît un invariant x ou y pour chacun des systèmes X ou Y de caractéristiques. Il suffit d'en connaître un autre pour que la méthode de Darboux soit applicable. Le premier pas a été fait par M. Goursat [1] qui a classé et intégré toutes les équations admettant pour *chaque* système un invariant autre que x ou y et d'ordre au plus égal à 2. J'ai démontré, dans le premier Chapitre de ma Thèse, qu'on est ramené aux mêmes formes si l'on suppose qu'il existe un invariant d'ordre 2 pour *un seul* des systèmes de caractéristiques.

---

(1) GOURSAT, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, p. 31-78 et 439-464.

On se bornera donc, dorénavant, à la recherche des invariants d'ordre $n > 2$.

Il n'y a que des difficultés de calcul pour décider si une équation donnée a un invariant d'un ordre déterminé n. Mais une fois qu'on aura reconnu que l'équation (1) n'a pas de solution pour cette valeur de n, on n'aura aucune indication sur ce qui peut se passer pour une valeur supérieure. La méthode de Darboux semble donc conduire à des opérations illimitées. Mais, des conditions *nécessaires et suffisantes* pour qu'il existe un invariant ou une involution, on peut déduire des conditions seulement *nécessaires*, qui ont l'avantage d'être très simples. On profite de leur simplicité pour restreindre la généralité de la fonction $f(x, y, z, p, q)$, et l'on essaye, par des transformations appropriées, de ramener l'équation à une forme canonique avantageuse. On peut alors revenir aux conditions nécessaires et suffisantes, et l'on se trouve, en général, devant des calculs plus abordables.

C'est M. Gau qui a trouvé la première condition nécessaire, simple et générale, pour qu'il existe une involution d'ordre $n > 2$. Voici une façon rapide de la démontrer. On a [1]

$$\frac{d^n f}{dx^n} = p_{n+1}\frac{\partial f}{\partial p} + p_n \mathrm{M}_n^n + p_{n-1}\mathrm{M}_n^{n-2} + \ldots + p_k \mathrm{M}_n^k + \mathrm{K}_n(x, y, z, q, p_1, \ldots, p_{k-1}),$$

les coefficients M étant indépendants de $p_{n+1}, p_n, \ldots, p_k$, l'ordre maximum des dérivées contenues dans M_n^h étant $n - h + 2$ et k étant égal à $n' + 2$, en posant $n = 2n'$ ou $2n' + 1$. On a d'ailleurs

$$\mathrm{M}_n^n = n\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Ces formules permettent de démontrer le lemme suivant, que nous invoquerons souvent.

Lemme. — *S'il n'existe aucune involution d'ordre inférieur ou au plus égal à m, tout nombre u tel que*

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + f\frac{\partial u}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial p_m}\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}} + ku\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad (k = \text{const.})$$

est nul ou d'ordre 1.

(1) Gau, *Thèse*, p. 34 et 39.

Supposons $u \neq 0$. En changeant u en u^k, on peut prendre $k = 1$. On a alors, en posant $v = \mathrm{L}\, u$,

$$(3) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial p_l}\frac{d^{l-1} f}{dx^{l-1}} + \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

si l est l'ordre effectif de v. Si $l > 1$, en dérivant par rapport à p_l et posant $w = \mathrm{L}.\frac{\partial v}{\partial p_l}$, on a

$$(4) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} + f\frac{\partial w}{\partial p} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial p_l}\frac{d^{l-1} f}{dx^{l-1}} + \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

En retranchant (3) de (4), on voit que $w - v$ est un invariant d'ordre $l \leqq m$; comme il n'en peut exister d'autre que x, on a successivement

$$\mathrm{L}\frac{\partial v}{\partial p_l} - v = \mathrm{L}\,\mathrm{X}(x), \qquad u = e^v = \frac{\mathrm{X}(x)}{p_l + \psi(x, y, z, \ldots, p_{l-1}} \qquad (\mathrm{X} \neq 0).$$

En portant cette valeur de u dans 2, on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + q\frac{\partial \psi}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial p_{l-1}}\frac{d^{l-2} f}{dx^{l-2}} + \frac{d^{l-1} f}{dx^{l-1}} = \frac{\partial f}{\partial p}(p_l + \psi).$$

Il existerait une involution d'ordre $l \leqq m$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, $l = 1$. C. Q. F. D.

Supposons alors que l'équation $p_n + \varphi = 0$ soit l'involution d'ordre minimum. On a

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}}\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} = (p_n + \varphi)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Si l'on désigne par des accents les dérivées par rapport à p_{n-1}, on en déduit

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + q\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi'}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial \varphi'}{\partial p_m}\frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}} + \mathrm{M}_{n-1}^{n-1} = 0,$$

si m est l'ordre effectif de $\frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}}$, M_{n-1}^{n-1} étant d'ordre $\leqq 2$. Supposons $m > 2$ et posons $u = \frac{\partial \varphi'}{\partial p_m} \neq 0$. En dérivant (6) par rapport à p_m, on voit que u vérifie (2). Comme il n'est pas nul, il est du premier ordre. Il existe donc un nombre $\lambda(x, y, z, p) \neq 0$ tel que

l'on ait

$$\Gamma_1(\lambda) \equiv \frac{\partial\lambda}{\partial y} + q\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f\frac{\partial\lambda}{\partial p} + \lambda\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

S'il n'existe aucun nombre $\lambda \neq 0$ vérifiant cette relation, on a $m \leqq 2$. Il existe donc un nombre $\mu(x, y, z, p_1, p_2)$ vérifiant la relation (6), et l'on a

$$(7)\quad \frac{\partial\mu}{\partial y} + q\frac{\partial\mu}{\partial z} + f\frac{\partial\mu}{\partial p_1} + \frac{\partial\mu}{\partial p_2}\frac{df}{dx} + (n-1)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

En désignant par des accents les dérivées par rapport à p_2, on voit que μ'' vérifierait (2), où $k = 2$; $\sqrt{\mu''}$ vérifierait $\Gamma_1(\lambda) = 0$; on a donc $\mu'' = 0$. En faisant dans la condition (7)

$$\mu = r(n-1)\alpha(x, y, z, p) + \beta(x, y, z, p),$$

on retrouve les conditions nécessaires de M. Gau :

$$C_1(\alpha) \equiv \frac{\partial\alpha}{\partial y} + q\frac{\partial\alpha}{\partial z} + f\frac{\partial\alpha}{\partial p} + \alpha\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} C_2(\beta) = \frac{\partial\beta}{\partial y} + q\frac{\partial\beta}{\partial z} + f\frac{\partial\beta}{\partial p} + (n-1)\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q}\right) \\ + (n-1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial x} + p\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial z} + f\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}. \end{aligned}$$

Si l'on permute les rôles des variables x et y, on voit de même qu'il n'y a d'involution du système Y que si f vérifie un des groupes de conditions

(I) $\qquad \Gamma'_1(\lambda') = 0,$

(II) $\qquad C'_1(\alpha') = 0, \qquad C'_2(\beta') = 0.$

23. J'ai montré, dans ma Thèse, qu'on peut toujours adjoindre une seconde condition nécessaire simple à la condition Γ_1. Voici un moyen d'arriver plus vite au même résultat.

Si φ vérifie (5), $\frac{\partial\varphi'}{\partial p_m}$, si $m > 2$, est une fonction $\lambda(x, y, z, p) \neq 0$. On a donc

$$\varphi' = \lambda p_m + \psi(x, y, z, \ldots, p_{m-1}).$$

En portant cette valeur dans (6), on a, en tenant compte de Γ_1,

$$(8)\quad \frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial p_{m-1}}\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}} + \lambda\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) + M''_{n-1} = 0.$$

Posons $\psi' = \frac{\partial\psi'}{\partial p_{m-1}}$; il vient, si $m - 1 > 2$,

$$(9) \qquad \frac{\partial\psi'}{\partial y} + q\frac{\partial\psi'}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi'}{\partial p_{m-1}}\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}} + \psi'\frac{\partial f}{\partial p} + \lambda M_{m-1}^{m-1} = 0,$$

et le lemme nous assure que $\psi'' = X_1(x)\lambda^2$, et par suite,

$$\psi' = X_1\lambda^2 p_{m-1} + \lambda\psi_1(x, y, z, \ldots p_{m-2}).$$

En portant cette valeur dans (9), on obtient

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi_1}{\partial p_{m-2}}\frac{d^{m-3}f}{dx^{m-3}} + X_1\lambda\left(\frac{d^{m-2}f}{dx^{m-2}}\right) + M_{m-1}^{m-1} = 0.$$

Mais, d'une façon générale, de la relation

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_k}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi_k}{\partial p_{m-k-1}}\frac{d^{m-k-2}f}{dx^{m-k-2}} + X_k\lambda\left(\frac{d^{m-k-1}f}{dx^{m-k-1}}\right) + M_{m-k}^{m-k} = 0,$$

on tirera, en désignant par des accents les dérivées par rapport à p_{m-k-1},

$$\psi_k'' = X_{k+1}\lambda^2, \qquad \psi_k' = X_{k+1}\lambda^2 p_{m-k-1} + X_k\lambda\,\psi_{k+1}(x_1, \ldots, p_{m-k-2}),$$

en supposant $m - k - 1 > 2$. Si X_k n'est pas nul, on en déduit que

$$\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial p_{m-k-2}}\frac{d^{m-k-3}f}{dx^{m-k-3}} + X_{k+1}\lambda\left(\frac{d^{m-k-2}f}{dx^{m-k-2}}\right) + M_{m-k-1}^{m-k-1} = 0.$$

Si X_k est nul, ψ_k'' doit être nul en vertu du lemme; on a alors

$$\psi_k = \lambda X_{k+1}p_{m-k-1} + \psi_{k+1}(x, y, \ldots, p_{m-k-2}),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial y} + q\frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi_{k+1}}{\partial p_{m-k-2}}\frac{d^{m-k-3}f}{dx^{m-k-3}} + X_{k+1}\lambda\left(\frac{d^{m-k-2}f}{dx^{m-k-2}}\right) + M_{m-k}^{m-k} = 0.$$

On a toujours une relation de même forme que celle d'où l'on est parti, mais où l'ordre de la fonction ψ a diminué d'une unité. On ne sera arrêté dans le calcul que lorsque $m - k - 1 = 2$. Il existe donc

une fonction $g(x, y, z, p, r)$ telle que

$$(10)\qquad \frac{\partial g}{\partial y} + q\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial r}\frac{df}{dx} + \lambda X\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) + M'_l = 0 \qquad (l \geqq 3).$$

Nous poserons :

$$H = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + r\frac{\partial^2 f}{\partial p^2},$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = r^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + C_1 r + C_0 \quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= 2\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}, \\ C_0 &= \frac{\partial H}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial z} + f\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (10) s'écrit alors

$$\begin{aligned} (10)'\qquad & \frac{\partial g}{\partial y} + q\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + H\right) \\ & + \lambda X\left(r^2\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + C_1 r + C_0\right) \\ & + l\left(\frac{\partial H}{\partial p} + r\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right) - (l-1)\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0, \end{aligned}$$

et l'on en tire, en désignant par des accents les dérivées par rapport à r,

$$\begin{aligned} (11)\qquad & \frac{\partial g'}{\partial y} + q\frac{\partial g'}{\partial z} + f\frac{\partial g'}{\partial p} + \frac{\partial g'}{\partial r}\frac{df}{dx} \\ & \qquad + g'\frac{\partial f}{\partial p} + \lambda X\left(2r\frac{\partial f}{\partial p} + C_1\right) + l\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0, \end{aligned}$$

$$(12)\qquad \frac{\partial g''}{\partial y} + q\frac{\partial g''}{\partial z} + f\frac{\partial g''}{\partial p} + \frac{\partial g''}{\partial z}\frac{df}{dx} + 2g''\frac{\partial f}{\partial p} + 2\lambda X\frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

$$(13)\qquad \frac{\partial g'''}{\partial y} + q\frac{\partial g'''}{\partial z} + f\frac{\partial g'''}{\partial p} + \frac{\partial g'''}{\partial z}\frac{df}{dx} + 3g'''\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

1° $X \neq 0$. Le lemme donne

$$g''' = 2X_1\lambda^3, \qquad g'' = 2[X_1\lambda^3 r + \lambda^2\theta(x, y, z, p)].$$

La relation (12) donne alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + q\frac{\partial \theta}{\partial z} + f\frac{\partial \theta}{\partial p} + X_1\lambda H + \frac{X}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

Mais on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\frac{X}{\lambda}\right\} + q\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\frac{X}{\lambda}\right\} + f\frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\frac{X}{\lambda}\right\} - \frac{X}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

Il existe alors, si X_1 n'est pas nul, un nombre $\mu(x, y, z, p)$ tel que

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} + q\frac{\partial\mu}{\partial z} + f\frac{\partial\mu}{\partial p} + \lambda H = 0.$$

Cette condition, jointe à $\Gamma_1(\lambda) = 0$, montre que $\frac{\delta}{\delta x}(\lambda r + \mu)$ est nul. Puisqu'il n'y a pas d'invariant du second ordre, X_1 est nul, et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta + \frac{\partial}{\partial p}\frac{X}{\lambda}\right\} + q\frac{\partial}{\partial z}\left\{\theta + \frac{\partial}{\partial p}\frac{X}{\lambda}\right\} + f\frac{\partial}{\partial p}\left\{\theta + \frac{\partial}{\partial p}\frac{X}{\lambda}\right\} = 0.$$

Si l'on se borne aux équations non linéaires en q, on en conclut, en changeant λ en λX, ce qui revient à prendre $X = 1$, que

$$\theta + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\lambda} = -X_2, \qquad g'' = -2\lambda^2\left(X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\lambda}\right),$$
$$g' = -2\lambda^2 r\left(X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\lambda}\right) + \lambda\,\theta_1(x, y, z, p).$$

En portant cette valeur de g' dans (11), on voit, tous calculs faits, qu'il existe un nombre $\tau(x, y, z, p)$ tel que l'on ait

$$(14) \qquad \frac{\partial\tau}{\partial y} + q\frac{\partial\tau}{\partial z} + f\frac{\partial\tau}{\partial p} - 2\lambda H\left[X + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] + C_1 = 0.$$

2° Supposons $X = 0$. La relation (12) donne alors

$$g'' = lX_1\lambda^2, \qquad g' = l[X_1\lambda^2 r + \lambda\,\theta(x, y, z, p)],$$

et la relation (11),

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} + q\frac{\partial\theta}{\partial z} + f\frac{\partial\theta}{\partial p} + X_1\lambda H + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0.$$

Si X_1 n'est pas nul, on en conclut comme précédemment qu'il y a un invariant du second ordre. Si X_1 est nul, $\theta = -\left\{X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\lambda}\right\}$, et l'on a successivement

$$g = -l\lambda r\left(X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\lambda}\right) + \tau(x, y, z, p),$$

$$(15) \qquad \frac{\partial\tau}{\partial y} + q\frac{\partial\tau}{\partial z} + f\frac{\partial\tau}{\partial p}$$
$$- l\lambda H\left(X_2 + \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\lambda}\right) + l\frac{\partial H}{\partial p} - (l-1)\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right) = 0.$$

On retrouve la relation (14) en prenant $l = 2$. D'ailleurs, en

posant $\mu = -$ L.λ, on a

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial \mu}{\partial y} + q\frac{\partial \mu}{\partial z} + f\frac{\partial \mu}{\partial p},$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\mu}{dx}\right) + q\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\mu}{dx}\right) + f\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{d\mu}{dx}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial p}\left(\frac{df}{dx}\right)$$
$$= \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

En posant

$$\tau = \theta(x, y, z, p) + l\left(\frac{d\mu}{dx}\right),$$

la condition (15) devient

$$\Gamma_2(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial y} + q\frac{\partial \theta}{\partial z} + f\frac{\partial \theta}{\partial p}$$
$$- \lambda X(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

En permutant le rôle des variables x et y, on obtiendrait une condition analogue $\Gamma'_2(\theta) = 0$.

24. Conditions nécessaires pour qu'il existe un invariant d'ordre $n > 2$. — S'il existe un nombre $\lambda \neq 0$ tel que $\Gamma_1(\lambda) = 0$, la recherche des invariants et celle des involutions constituent le même problème. On a, en effet, simultanément

$$\frac{\delta}{\delta x}L(p_n + \varphi) = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad \frac{\delta}{\delta x}L\lambda = -\frac{\partial f}{\partial p},$$

s'il existe une involution dans ce cas. On en conclut

$$\frac{\partial}{\partial x}L\lambda(p_n + \varphi) = 0,$$

ce qui montre que $\lambda(p_n + \varphi)$ est un invariant.

Il n'en est plus de même si la condition Γ_1 n'est pas vérifiée. Supposons qu'il existe un invariant de la forme $a(p_n + \varphi)$; on doit avoir

$$\frac{\partial La}{\partial y} + q\frac{\partial La}{\partial z} + \ldots + \frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\frac{\partial La}{\partial p_m} + \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

en appelant m l'ordre effectif de a. On aura alors

$$m > 1, \qquad u = \frac{\partial La}{\partial p_m} \neq 0.$$

En dérivant par rapport à p_m, on a donc

$$\frac{\partial \mathrm{L} u}{\partial y} + q \frac{\partial \mathrm{L} u}{\partial z} + \ldots + \frac{d^{m-1} f}{dx^{m-1}} \frac{\partial \mathrm{L} u}{\partial p_m} + \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Si nous supposons que l'invariant considéré est l'invariant d'ordre minimum, un calcul identique à celui du lemme montre alors que $a = \frac{\mathrm{X}(x)}{p_m + \theta(x, y, z, \ldots, p_{m-1})}$, l'équation $p_m + \theta = 0$ étant en involution avec la proposée.

L'invariant donné est donc de la forme $\frac{p_n + \varphi}{p_m + \theta}$.

Réciproquement, si l'on connaît deux involutions, les deux conditions

$$\frac{\delta}{\delta x} \mathrm{L}(p_n + \varphi) = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{L}(p_m + \theta) = \frac{\partial f}{\partial p} \qquad (m < n)$$

montrent que $\frac{p_n + \varphi}{p_m + \theta}$ est un invariant d'ordre n. Dans ce cas, il est donc nécessaire et suffisant, pour qu'il y ait un invariant, qu'il existe deux involutions d'ordre différent. Il faudra, par conséquent, ajouter aux conditions $C_1(\alpha) = 0$, $C_2(\beta) = 0$, celle qu'on déduit de $C_2(\beta)$ en changeant n en m.

25. **Le problème général.** — On peut le formuler ainsi : *Trouver toutes les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ qui admettent une involution d'ordre quelconque n.*

Si $n = 2$, il suffit de chercher pour quelles formes de f le système

$$\frac{\partial \mu}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial y} + q \frac{\partial \mu}{\partial z} + f \frac{\partial \mu}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f}{\partial q} = \mu \frac{\partial f}{\partial p}$$

admet une solution en μ.

Si $n > 2$, il faudra d'abord voir pour quelles formes de f le système

$$\Gamma_1(\lambda) = 0, \qquad \Gamma_2(\theta) = 0,$$

ou le système

$$C_1(\alpha) = 0, \qquad C_2(\beta) = 0$$

admet une solution en λ, θ ou α, β. Pour $n = 2$, on n'a pas d'autres conditions. Mais si n est $\geqq 3$, la méthode qui nous a donné les conditions C est susceptible de nous en fournir d'autres. Elle suppose, en effet (n° 22), que

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial p_{n-1}} = \mu = (n-1)\alpha v + \beta.$$

On a donc

$$\varphi = \mu p_{n-1} + \psi(x, y, z, p_1, \ldots, p_{n-2}),$$

et la relation (5) donne alors, après simplifications,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} + q\frac{\partial\psi}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial p_{n-2}}\frac{d^{n-3}f}{dx^{n-3}} + \mu\left(\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}\right) + p_{n-2}M_{n-2}^{n-2} + \ldots = \psi\frac{\partial f}{\partial p},$$

les termes non écrits à la fin du second membre étant d'ordre inférieur à $n-2$ et M_{n-1}^{n-2} étant d'ordre $\leqq 3$. Supposons $n-2 > 3$. En posant $\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial p_{n-2}}$, on a

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y} + q\frac{\partial\psi'}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial\psi'}{\partial p_m}\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}} + \mu M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = 0.$$

m étant l'ordre effectif de ψ'. Si m est supérieur à 3, en posant

$$u = \frac{\partial\psi'}{\partial p_m} \neq 0$$

on a, en dérivant par rapport à p_m,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial p_m}\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}} + u\frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

et puisque la condition Γ_1 n'est pas vérifiée par hypothèse, il y a, d'après le lemme, une involution d'ordre $\leqq n$. Si l'involution étudiée est celle d'ordre minimum, il faut que l'on ait $m \leqq 3$ et il existe alors une fonction $h(x, y, z, p_1, p_2, p_3)$ telle que

$$\frac{\partial h}{\partial y} + q\frac{\partial h}{\partial z} + f\frac{\partial h}{\partial p_1} + \frac{df}{dx}\frac{\partial h}{\partial p_2} + \frac{d^2f}{dx^2}\frac{\partial h}{\partial p_3} + \mu M_{n-2}^{n-2} + M_{n-1}^{n-2} = 0.$$

Un calcul simple montre que, si l'on pose $K = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}$, on aboutit aux conditions

$$C_3(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + f\frac{\partial u}{\partial p} + u\frac{\partial f}{\partial p} - 3\alpha^2 H - 6\alpha\frac{\partial H}{\partial p} + 4\alpha K - \frac{n}{2}\frac{\partial K}{\partial p} - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

$$C_4(v) \equiv \frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + f\frac{\partial v}{\partial p} + uH + \frac{\beta K}{n-1} - 3\alpha\left(\frac{dH}{dx}\right) + \frac{n}{2}\left(\frac{dK}{dx}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\left(2K - \frac{\partial H}{\partial p}\right) = 0,$$

u et v étant des fonctions de x, y, z, p seulement. On retrouve directement des conditions analogues quand $n = 3$, 4 ou 5.

Il faut alors chercher si les quatre conditions C peuvent être satisfaites et, s'il en est ainsi, la même méthode peut donner d'autres conditions.

Ce problème n'a pas été abordé dans toute sa généralité.

On peut encore se demander s'il existe des équations $s = f$ qui admettent *un seul invariant*, pour un des systèmes de caractéristiques. S'il existe un nombre $\lambda \neq 0$, tel que $\Gamma_1(\lambda) = 0$, ce problème se confond avec celui que nous venons d'analyser. Sinon, nous avons vu au n° 24 qu'il y a deux involutions. Supposons-les, par exemple, toutes deux d'ordre supérieur à 3. Les conditions C_2, C_3, C_4 devront être vérifiées par des fonctions β', u', v' de x, y, z, p seulement, n y étant remplacé par un autre nombre entier n'. On voit facilement qu'il suffit, pour qu'il en soit ainsi, d'ajouter aux quatre conditions C déjà écrites l'unique condition

$$C_5[w(x, y, z, p)] \equiv \frac{\partial w}{\partial y} + q\frac{\partial w}{\partial z} + f\frac{\partial w}{\partial p} + K = 0.$$

Ce problème n'a reçu de solutions que dans des cas très particuliers. Sophus Lie [1] a démontré directement que l'équation $s = f(z)$ ne peut avoir d'invariants que si $f(z)$ est constant ou égal à $C_1 e^{cz}$; M. Goursat [2] a montré qu'une équation linéaire dont la suite de Laplace se termine après $p+1$ transformations admet un invariant d'ordre p, et réciproquement : la méthode de Darboux et celle de Laplace réussissent en même temps. Moutard [3] a ramené aux équations linéaires les équations

$$s - \frac{\partial}{\partial x}[A(x, y)e^z] + \frac{\partial}{\partial y}[B(x, y)e^{-z}] + C(x, y) = 0.$$

Clairin [4] a ramené au type de Moutard les équations $s = f(x, y, z)$ qui admettent un invariant. Mais on n'a pu résoudre de problèmes relatifs à des équations quelque peu générales qu'en supposant l'existence d'une involution pour chaque système de caractéristiques.

---

(1) *Voir* GOURSAT, *Leçons*, t. II, p. 182-185.

(2) GOURSAT, *Leçons*, t. II, p. 174-178.

(3) *Voir* GOURSAT, *Leçons*, t. II, p. 228 et sq, 278-280.

(4) CLAIRIN, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXIX, 1905, p. 177.

26. **Les problèmes résolus.** — Si nous désignons par des accents les conditions qui se déduisent de celles que nous avons établies en permutant le rôle des variables x et y, il peut exister une involution pour chaque système de caractéristiques dans trois cas différents suivant que sont vérifiées :

1° Les conditions C et C';
2° Les conditions C et Γ' (ou Γ' et C);
3° Les conditions Γ et Γ'.

M. Gau (¹) en a fait l'étude systématique en supposant l'équation *bilinéaire*

$$s = \lambda(x, y, z)pq + a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z).$$

Dans les deux premiers cas, *l'équation proposée peut toujours être mise sous la forme de Moutard et se ramène, par suite, à une équation linéaire intégrable par la méthode de Laplace.* Dans le troisième cas, il y a un invariant (n° 25) pour chaque système de caractéristiques. L'équation ne peut être que de la forme

$$s = a(x, y, z)pq.$$

Si $\frac{\partial a}{\partial x}$ n'est pas nul, *on peut encore la ramener à la forme de Moutard.* Si $\frac{\partial a}{\partial x}$ est nul, on peut l'écrire

$$s = pq\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{Log} b(y, z)$$

et elle admet l'intégrale intermédiaire du premier ordre

$$q = Y(y)b(y, z).$$

M. Gau a démontré *qu'elle ne peut admettre d'invariants du système X que s'ils sont de l'ordre 2 ou 3.*

Dans les deux cas, l'équation se ramène à un des types étudiés et intégrés par M. Goursat (n° 21).

J'ai généralisé ces résultats dans ma Thèse.

En supposant que l'équation $s = f(x, y, z, p, q)$ n'est linéaire ni par rapport à p, ni par rapport à q, j'ai démontré qu'elle ne

---

(¹) GAU, *Thèse* et *Annales de l'Université de Grenoble*, t. XXV, p. 95-106.

peut admettre une involution pour chaque système de caractéristiques que si elle se ramène par une transformation simple à l'un des types de M. Goursat.

Dans un récent article des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, j'ai étendu ce résultat aux équations $s = f(x, y, z, p, q)$ linéaires soit par rapport à p, soit par rapport à q, sous la réserve que ces équations n'admettent pas d'intégrale intermédiaire du premier ordre.

L'ensemble de ces résultats permet donc d'énoncer le théorème général suivant :

Théorème. — *Toutes les équations* $s = f(x, y, z, p, q)$ *qui admettent une involution pour chaque système de caractéristiques, sans admettre d'intégrale intermédiaire du premier ordre, se ramènent par des transformations simples aux équations de M. Goursat.*

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Toutes les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ *qui s'intègrent par la méthode de Darboux, sans admettre d'intégrale intermédiaire du premier ordre, se ramènent par des transformations simples, aux équations de M. Goursat.*

Il ne nous reste donc qu'à étudier les équations qui admettent une intégrale intermédiaire du premier ordre.

CHAPITRE V.

DES ÉQUATIONS $s = f(x, y, z, p, q)$ QUI ADMETTENT UNE INTÉGRALE INTERMÉDIAIRE DU PREMIER ORDRE.

27. Cette intégrale intermédiaire sera, par exemple,

$$\varphi(x, y, z, p, q) = Y.$$

Il faut alors que $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$ soit nul et l'équation pourra s'écrire

$$s \frac{\partial \varphi}{\partial q} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad \text{ou} \qquad s = p\theta(x, y, z, q) + \omega(x, y, z, q).$$

S'il y a une involution du système Z, on a ou bien les conditions Γ, ou bien les conditions C, et la discussion montre qu'on n'a à étudier que les deux types d'équations

$$(\text{I}) \qquad s\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y, q)=0 \qquad \text{ou} \qquad s=f(x, y, q),$$

$$(\text{II}) \qquad s\frac{\partial\varphi}{\partial q}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y, z, q)=0 \qquad \text{ou} \qquad s=p\theta(y, z, q).$$

28. Étude des équations $s=f(x, y, q)$. — Soit φ une solution quelconque de l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f\frac{\partial\varphi}{\partial q}=0.$$

L'équation donnée peut s'écrire $\varphi(x, y, q)=Y(y)$ et il est clair qu'on peut prendre pour φ une fonction quelconque de lui-même et de y sans que l'équation précédente cesse d'être une intégrale intermédiaire.

Posons

$$F_1(u)=\frac{\partial u}{\partial x}+f\frac{\partial u}{\partial q}, \qquad \dots, \qquad F_n(u)=F\{F_{n-1}(u)\};$$

on a

$$\frac{df}{dx}=F_1(f), \qquad \dots, \qquad \frac{d^pf}{dx^p}=F_p(f),$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une involution d'ordre n, $p_n+\psi(x, y, z, \dots, p_{n-1})=0$ s'écrit

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}+q\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial p}+\dots+F_{n-2}(f)\frac{\partial\psi}{\partial p_{n-1}}+F_{n-1}(f)=0.$$

Désignons par des accents les dérivations par rapport à p_{n-1}; on a

$$\frac{\partial\psi'}{\partial y}+q\frac{\partial\psi'}{\partial z}+\dots+F_{n-2}(f)\frac{\partial\psi'}{\partial p_{n-1}}=0.$$

Si n est l'ordre minimum d'involution, cette condition exige que

$$\psi=p_{n-1}X_{n-1}(x)+\psi_1(x, y, z, \dots, p_{n-2}).$$

On voit de même que

$$\psi_1 = p_{n-2} X_{n-2} + \psi_2(x, \ldots, p_{n-3}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi = X_{n-1} p_{n-1} + \ldots + X_1 p_1 + X_0 z + g(x, y).$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une involution d'ordre n s'écrit alors

$$\text{(A)} \quad \frac{\partial g}{\partial y} + q X_0 + f X_1 + X_2 F_1(f) + \ldots + X_{n-1} F_{n-2}(f) + F_{n-1}(f) = 0.$$

C'est là une équation aux dérivées partielles que doit vérifier f, et nous pouvons supposer qu'elle n'en vérifie aucune autre de même forme et d'ordre inférieur, si l'invariant d'ordre minimum est d'ordre n.

29. Lemme. — *Si la fonction $f(u, v)$ vérifie la relation*

$$F_k(f) + A_k(u) F_{k-1}(f) + \ldots + A_1(u) f + v A_0(u) = \sum_{i=1}^{i=h} l_i(\varphi) B_i(u),$$

φ étant une solution quelconque de l'équation $\frac{\partial \varphi}{\partial u} + f \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, *$f$ vérifie aussi une relation de la forme*

$$F_{k-1}(f) + C_{k-1}(u) F_{k-2}(f) + \ldots + v C_0(u) = \sum_{i=1}^{i=h+1} l_i(\varphi) D_i(u).$$

Remarquons, en effet, que pour que l'on ait identiquement

$$[F_k(f) + A_k(u) F_{k-1}(f) + \ldots + v A_0] U(u)$$
$$\equiv F_1[U F_{k-1} + E_{k-1}(u) F_{k-2}(f) + \ldots + v E_0(u)]$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$E_{k-1} = A_k U - U', \qquad E'_{k-1} + E_{k-2} = A_{k-1} U,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$E'_1 + E_0 = A_1 U, \qquad E'_0 = A_0 U.$$

L'identité sera donc assurée et les nombres E déterminés, si U est une solution quelconque non nulle de l'équation différentielle

$$U A_0 - [U A_1]' + \ldots + (-1)^i [U A_i]^{(i)} + \ldots + (-1)^k [U A_k - U']^{(k)} = 0,$$

les indices indiquant les dérivations par rapport à u.

La relation donnée s'écrit alors, en posant

$$\psi = \mathrm{U}\mathrm{F}_{k-1} + \mathrm{E}_{k-1}(u)\,\mathrm{F}_{k-2} + \ldots + v\,\mathrm{E}_0,$$

$$\mathrm{F}_1(\psi) = \mathrm{U}\sum_1^h \mathrm{B}_i(u)\,l_i(\varphi),$$

et l'on obtient bien en intégrant une relation de la forme annoncée.

Théorème. — *L'intégrale générale de l'équation*

$$\mathrm{F}_{n-1}(f) + \mathrm{A}_{n-1}(u)\,\mathrm{F}_{n-2}(f) + \ldots + \mathrm{A}_1(u)\,f + v\,\mathrm{A}_0(u) = \mathrm{B}(u)$$

s'obtient en éliminant φ entre les deux équations

$$v = u_1\,l_1(\varphi) + \ldots + u_n l_n(\varphi) + u_{n+1},$$
$$f = u'_1\,l_1(\varphi) + \ldots + u'_n\,l_n(\varphi) + u'_{n+1},$$

les nombres l_i étant n fonctions linéairement indépendantes de φ, u_{n+1} étant une solution particulière de l'équation

$$\mathrm{U}^{(n)} + \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{U}^{(n-1)} + \ldots + \mathrm{A}_1\mathrm{U}' + \mathrm{A}_0\mathrm{U} = \mathrm{B}(u)$$

et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ formant un système fondamental d'intégrales de la même équation sans second membre.

L'application réitérée du lemme donne précisément, pour f et v, les expressions annoncées, les fonctions l_i étant arbitraires. En portant ces valeurs dans l'équation proposée et écrivant que celle-ci est vérifiée quelles que soient les fonctions l_i, on obtient les dernières conditions. La démonstration suppose, comme le lemme, que la fonction f ne vérifie aucune équation de même forme et d'ordre inférieur.

Conséquences. — *Toutes les équations $s = f(x, y, q)$ qui admettent un invariant d'ordre supérieur à 2 s'obtiennent en éliminant φ entre les deux relations*

$$q = \sum_1^n l_i(y, \varphi)\,\xi_i(x) + \xi_{n+1}(x),$$

$$s = \sum_1^n l_i(y, \varphi)\,\frac{d\xi_i(x)}{dx} + \frac{d\xi_{n+1}(x)}{dx}.$$

Un changement d'inconnue évident permet de prendre $\xi_{n+1} = 0$, et l'intégrale générale de l'équation est

$$z = \mathrm{X}(x) + \sum_1^n \xi_i(x) \int l_i[y, \mathrm{Y}(y)]\, dy.$$

30. Il est facile d'en déduire toutes les équations qui admettent une intégrale entièrement explicite. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le système de Pfaff à n équations et $n+2$ variables

$$a_i \equiv dy_i - l_i(y, t)\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soit un *système spécial* (¹). En appliquant la méthode due à M. Cartan, on voit que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} = \varphi_i(t) f(y, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous allons montrer directement qu'on peut alors expliciter z. Explicitons d'abord les fonctions l_i. On a

$$l_1 = \int \varphi_1 f\, dt, \qquad \ldots, \qquad l_i = \int \varphi_i f\, dt, \qquad \ldots.$$

Si l'on pose

$$f\varphi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(y, t), \qquad \mathrm{H}_i^1 = \frac{\partial l_i}{\partial t} : \frac{\partial l_1}{\partial t},$$

on a

$$l_1 = \psi, \qquad l_i = \mathrm{H}_i^1 \psi_1 - \int \psi_1 \frac{d\mathrm{H}_i^1}{dt}\, dt \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

En désignant par des accents les dérivées par rapport à t et en posant

$$\psi_1(\mathrm{H}_2^1)' = \psi_2'(y, t), \qquad \mathrm{H}_i^2 = (\mathrm{H}_i')' : (\mathrm{H}_2')',$$

il vient

$$l_1 = \frac{\psi_2'}{(\mathrm{H}_2')'}, \qquad l_2 = \frac{\mathrm{H}_2^1 \psi_2'}{(\mathrm{H}_2')'} - \psi_2, \qquad f = \frac{1}{\varphi_1}\left[\frac{\psi_2'}{(\mathrm{H}_2^1)'}\right]',$$

$$l_i = \mathrm{H}_i^1 \frac{\psi_2'}{(\mathrm{H}_2^1)'} - \psi_2 \mathrm{H}_i^2 + \int \psi_2 (\mathrm{H}_i^2)'\, dt \qquad (i = 3, \ldots, n).$$

En continuant ainsi de proche en proche, on arrivera à chasser

(¹) *Voir* Cartan, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLII, 1914, p. 12-48.

tous les signes d'intégration des expressions de l_i, et en posant

$$\psi_n(y, t) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(y, t),$$

on aura finalement

$$f = \alpha_{0,1}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_{0,2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t} + \ldots + \alpha_{0,n+2}\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial y\,\partial t^n} = \sum_{k=1}^{k=n+1}\alpha_{0,k}\frac{\partial^k\psi}{\partial y\,\partial t^{k-1}},$$

$$l_i = \alpha_{i,1}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \alpha_{i,2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t} + \ldots + \alpha_{i,n}\frac{\partial^n\psi}{\partial y\,\partial t^{n-1}} = \sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{i,k}\frac{\partial^k\psi}{\partial y\,\partial t^{k-1}},$$

$\alpha_{0,1}$ étant nul, et les nombres $\alpha_{i,k}$ étant des fonctions de la variable t *qui ne dépendent que des fonctions* φ_i. La fonction ψ étant arbitraire, puisque f l'est, on a identiquement

$$\frac{\partial l_i}{\partial t} = f\varphi_i,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^{n+1}\frac{\partial^k\psi}{\partial y\,\partial t^{k-1}}(\alpha'_{i,k} + \alpha_{i,k-1}) = \varphi_i\sum_1^{n+1}\alpha_{0,k}\frac{\partial^k\psi}{\partial y\,\partial t^{k-1}},$$

et les nombres $\alpha_{i,k}$ vérifient les relations de récurrence

$$\alpha'_{i,k} + \alpha_{i,k-1} = \varphi_i\alpha_{0,k}.$$

Si donc on pose

$$L_i = \sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{i,k}\frac{\partial^{k-1}\psi}{\partial t^{k-1}}, \qquad F = \sum_{k=1}^{k=n+1}\alpha_{0,k}\frac{\partial^{k-1}\psi}{\partial t^{k-1}},$$

on a

$$\frac{\partial L_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{\partial^{k-1}\psi}{\partial t^{k-1}}(\alpha'_{i,k} + \alpha_{i,k-1}) = \sum_{k=1}^{k=n+1}\varphi_i\,\alpha_{0,k}\frac{\partial^{k-1}\psi}{\partial t^{k-1}} = \varphi_i F.$$

31. Il est dès lors facile de calculer les intégrales

$$I_i = \int l_i(y, t)\,dy,$$

où y est une fonction arbitraire $\theta(t)$. On a, en effet,

$$I_i = \int\frac{\partial L_i}{\partial y}dy = L_i - \int\frac{\partial L_i}{\partial t}dt = L_i - \int\varphi_i(t)\,F(t, y)\,dt.$$

Tout revient à calculer les fonctions

$$G_i = \int \varphi_i(t)\, F(t, y)\, dt$$

et c'est un calcul en tous points identique à celui qui donne les fonctions l_i. On obtiendra

$$G_i = \alpha_{i,1}\, \tau(t) + \ldots + \alpha_{i,n}\, \tau^{n-1}(t),$$

la fonction $\theta(t)$ étant liée à la fonction arbitraire $\tau(t)$ par la relation implicite

$$F(\theta, t) = \alpha_{0,1}\, \tau(t) + \ldots + \alpha_{0,n+1}\, \tau^{n}(t).$$

On en conclut que

$$I_i = \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{i,k} \frac{\partial^{k-1}(\psi - \tau)}{\partial t^{k-1}},$$

y étant défini en fonction de $\tau(t)$ par l'équation

$$\sum_{1}^{n+1} \alpha_{0,k} \frac{\partial^{k-1}(\psi - \tau)}{\partial t^{k-1}} = 0.$$

Ainsi, y est exprimé au moyen d'une fonction arbitraire $\tau(t)$ et

$$z = X(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(x) \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{i,k} \frac{\partial^{k-1}[\psi(y, t) - \tau(t)]}{\partial t^{k-1}}.$$

Dans cette dernière formule, il faut, après les dérivations par rapport à t, remplacer y par sa valeur; z et y sont alors exprimés au moyen de x et t, par l'intermédiaire de deux fonctions arbitraires $X(x)$ et $\tau(t)$.

32. **Études des équations** $s = p\theta(y, z, q)$. — Nous poserons encore

$$F_0(u) = \theta, \qquad F_1(u) = \frac{\partial u}{\partial z} + \theta \frac{\partial u}{\partial q}, \qquad \ldots, \qquad F_n(u) = F_1\{F_{n-1}(u)\}.$$

Si u ne contient que y, z, q, on a

$$\frac{dF_i(u)}{dx} = p \frac{\partial F_i}{\partial z} + p\theta \frac{\partial F_i}{\partial q} = p\, F_{i+1}(u).$$

On en conclut sans peine que

$$\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}} = \sum_{0}^{k-1} a_k^i \mathrm{F}_i(\theta);$$

les nombres a_k^i ne dépendent que des variables $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe *un invariant* $\varphi(x, y, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\mathrm{F}_0\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \ldots + \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\sum_{i=0}^{i=k-1} a_k^i \mathrm{F}_i(\theta) + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\sum_{i=0}^{i=n-1} a_n^i \mathrm{F}_i(\theta) = 0.\end{aligned}$$

où x, qui est un invariant de même système que φ, peut être supposé remplacé par une constante. On peut alors écrire la condition précédente sous la forme

$$(\Gamma) \qquad \mathrm{C}_{n-1}\mathrm{F}_{n-1} + \ldots + \mathrm{C}_i\mathrm{F}_i + \ldots + \mathrm{C}_0\mathrm{F}_0 + q\mathrm{C} + \mathrm{D} = 0,$$

où

$$\mathrm{D} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad \mathrm{C}_i = \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} a_n^i + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_{i+1}} a_{i+1}^i.$$

Les nombres F_i ne dépendent que des variables y, z, q; les nombres D, C, C_i ne dépendent que des variables y, z, p_i; il y a donc entre les nombres F_i une relation de la forme

$$(\Gamma') \qquad \mathrm{F}_k(\theta) + \mathrm{A}_{k-1}\mathrm{F}_{k-1}(\theta) + \ldots + \mathrm{A}_0\mathrm{F}_0(\theta) + \mathrm{A}q = \mathrm{B}(y, z)$$
$$(0 < k < n-1),$$

les nombres A étant des fonctions de y et z seuls. S'il y a plusieurs relations de cette forme, nous raisonnerons sur celle où l'indice k est le plus petit. Nous savons alors que la solution générale de l'équation (Γ') s'obtient (n° 29) en éliminant ψ entre les deux relations

$$q = \sum_{1}^{k} l_i(y, \psi)\mathrm{Z}_i(y, z) + \mathrm{Z}_{k+1}(y, z),$$

$$\theta = \frac{s}{p} = \sum_{1}^{k} l_i \frac{\partial \mathrm{Z}_i}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{Z}_{k+1}}{\partial z},$$

les nombres l_i n'étant liés par aucune relation linéaire à coefficients fonctions de y et de z, les nombres Z_i n'étant pas tous nuls.

Si l'on fait le changement d'inconnue $z = h(y, z')$, où

$$\frac{\partial h}{\partial y} = Z_{k+1}(y, z),$$

on voit qu'on ne diminue pas la généralité en prenant $Z_{k+1} = 0$.

Les équations que nous cherchons doivent donc avoir la forme précédente, où l'on a supprimé Z_{k+1}. Pour ces équations,

$$F_1(\psi) = 0, \qquad F_1(\theta) = \Sigma\, l_i \frac{\partial^2 Z_i}{\partial z^2}, \qquad \ldots, \qquad F_{n-1}(\theta) = \Sigma\, l_i \frac{\partial^n Z_i}{\partial z^n}.$$

La condition Γ donne alors

$$D + \sum_{i=1}^{i=k} l_i \left(C_{n-1} \frac{\partial^n Z_i}{\partial z^n} + \ldots + C_0 \frac{\partial Z_i}{\partial z} + c Z_i \right) = 0$$

Si le premier membre de cette égalité n'était pas identiquement nul, en donnant aux variables p des valeurs fixes, on en deduirait, entre les nombres l_i, une relation linéaire à coefficients fonctions de y et z. Il faut donc que l'on ait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

et

$$(\Gamma_i) \qquad C_{n-1} \frac{\partial^n Z_i}{\partial z^n} + \ldots + C_0 \frac{\partial Z_i}{\partial z} + C Z_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Il y a au moins une fonction Z_i qui n'est pas nulle. Considérons alors l'équation (E)

$$(E) \qquad s = pq \frac{Z_i'}{Z_i}.$$

On a, pour cette équation,

$$\theta = q \frac{Z_i'}{Z_i}, \qquad F_1(\theta) = q \frac{Z_i''}{Z_i}, \qquad \ldots, \qquad F_h(\theta) = q \frac{Z_i^{(h+1)}}{Z_i},$$

les indices indiquant des dérivations par rapport à z. La condition (Γ_i) exprime donc que l'équation (E) admet un invariant d'ordre n, $\varphi(z, p_1, \ldots, p_n)$. Mais cette équation est de la forme

$$s = pq \frac{\partial L\, b(y, z)}{\partial z},$$

complètement étudiée par M. Gau, dans sa Thèse (p. 108-117). Elle ne peut admettre d'invariants que de l'ordre 2 ou 3. M. Goursat (¹) ayant montré qu'il y a un invariant du second ordre lorsque $k = 1$, nous n'avons plus qu'à étudier le cas où $k = 2$, $n = 3$.

Posons alors

$$F_2(\theta) = b\,F_1(\theta) + a\theta + \beta q + \alpha.$$

Un calcul simple montre que le système, que doit vérifier φ et qu'on déduit immédiatement de la condition (Γ), n'a de solution que si

$$b = 0, \qquad a = -2c(y, z), \qquad \beta = -\frac{\partial c}{\partial z}, \qquad \alpha = -\frac{\partial c}{\partial y}.$$

Mais alors un changement d'inconnue $z' = h(y, z)$ montre que, si l'on pose

$$\frac{\partial h}{\partial z} = e^{\lambda}, \qquad c = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2,$$

on a identiquement

$$e^{2\lambda}\,F'_2(\theta') = F_2(\theta) + 2c\theta + q\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial y},$$

l'équation proposée étant supposée sous la forme

$$s' = p'\,\theta'(y, z', q').$$

On en conclut que toutes les équations que nous cherchons se déduisent par des transformations ponctuelles de celles qu'on obtient en éliminant φ entre les deux relations

$$q = z^2\,l(y, \varphi) + z\,m(y, \varphi), \qquad \frac{s}{p} = 2z\,l(y, \varphi) + m(y, \varphi).$$

Il est facile d'en obtenir l'intégrale générale. On peut, en effet, en changeant de fonction φ, écrire ces équations

$$q = z^2\,l(y, \varphi) + z\varphi, \qquad \frac{s}{p} = 2z\,l(y, \varphi) + \varphi$$

On a l'intégrale intermédiaire

$$\varphi = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

(¹) GOURSAT, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2ᵉ série, t. I, 1899, p. 31-78.

et la solution cherchée sera l'intégrale générale de l'équation de Riccati

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{Y'}{Y}\frac{1}{z} + l\left(y, \frac{Y'}{Y}\right) = 0.$$

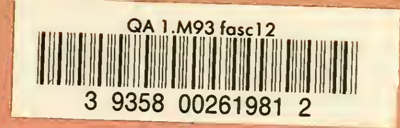
En changeant Y en e^{Y}, on peut écrire la solution sous la forme

$$\frac{e^{Y}}{z} = X(x) + \int e^{Y} l(y, Y')\, dy$$

L'intégrale explicite s'obtient alors facilement par les méthodes précédemment indiquées.

TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
77057



MATH

QA1
M93
fasc.12

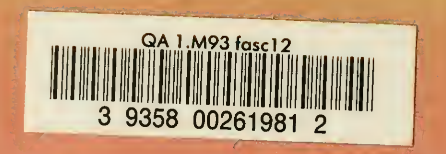
Gosse, René, 1883-
La méthode de Darboux et les équations s=f(x,y,z,p,q) par m. R. Gosse. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
52 p. 25 cm. (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 12)

261981

MATH



MBNU JAN 27,'75 1152658 NEMbp



NORTHEASTERN UNIVERSITY LIBRARY